

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.

Aufgabe 1:

- a) Definieren Sie die alternierende Gruppe A_n .
- b) Warum ist A_n für $n \geq 2$ eine Untergruppe vom Index 2 in S_n ?
- c) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_4 auflösbar ist.

Aufgabe 2:

Sei K ein Teilkörper von \mathbb{C} , der über \mathbb{Q} von endlichem Grad n ist. Zeigen Sie: Ist n ungerade und K normal über \mathbb{Q} , so gilt $K \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

Es seien p und q Primzahlen. Warum zerfällt das Polynom

$$f(X) = X^{p^q} - X$$

über dem Körper \mathbb{F}_p mit p Elementen in p verschiedene Faktoren vom Grad 1 und in $\frac{p^q - p}{q}$ verschiedene irreduzible Faktoren von Grad q ?

[Hinweis: Die Faktoren müssen nicht angegeben werden! Zum Einstieg in die Aufgabe überlege man, dass die Nullstellen von f einen Körper bilden.]

Aufgabe 4:

Sei $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ der Hauptidealring der ganzen Gaußschen Zahlen mit $i^2 = -1$, sei $N : R \rightarrow \mathbb{Z}$ die komplexe Norm $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

- a) Zeigen Sie, dass 11 ein Primelement und 13 kein Primelement in R ist.
- b) Zeigen Sie, dass $11R$ ein maximales Ideal in R ist, und zerlegen Sie $13R$ in ein Produkt von zwei maximalen Idealen.
- c) Welche Ordnung und welche Struktur hat die Gruppe $(R/11R)^\times$ der teilerfremden Restklassen modulo 11 in R ?
- d) Welche Ordnung und welche Struktur hat die Gruppe $(R/13R)^\times$ der teilerfremden Restklassen modulo 13 in R ?

[Hinweis: Der Chinesische Restsatz kann nützlich sein.]

Aufgabe 5:

Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome f über \mathbb{Z} :

- a) $f = X^p + pX - 1$ für jede Primzahl p
- b) $f = X^4 - 42X^2 + 1$