

**Thema Nr. 1**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.

**Aufgabe 1:**

Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $n$ . Zeigen Sie:

- a)  $G$  ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_n$ .
- b) Ist  $n = 2u$  mit ungeradem  $u$ , so hat  $G$  einen Normalteiler vom Index 2.

**Aufgabe 2:**

Beweisen Sie

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

**Aufgabe 3:**

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- a) Ist  $p$  eine Primzahl, sind  $1 \leq i \leq j$  natürliche Zahlen, sind  $K$  bzw.  $L$  Körper mit  $p^i$  bzw.  $p^j$  Elementen, so ist  $K$  zu einem Teilkörper von  $L$  isomorph.
- b) Für jede Primzahl  $p$  und jede natürliche Zahl  $a$  gilt:  
Ist  $X^2 \equiv a \pmod{p}$  lösbar in  $\mathbb{Z}$ , so auch  $X^4 \equiv a \pmod{p}$ .
- c) Die Zahl  $\zeta_{13} = e^{2\pi i/13}$  ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
- d) Seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  algebraische Zahlen, sei  $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$  für  $i = 1, 2$ , sei  $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$  und es gelte  $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$ . Dann gilt

$$[L: \mathbb{Q}] \text{ teilt } [K_1: \mathbb{Q}] \cdot [K_2: \mathbb{Q}].$$

**Aufgabe 4:**

Sei  $K$  ein Körper mit 81 Elementen, sei  $G$  die Gruppe aller Automorphismen von  $K$ . Bestimmen Sie:

- a) die Längen der Bahnen der Operation von  $G$  auf  $K$ , sowie
- b) die Anzahl der Bahnen gegebener Länge.