

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

- (a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$7 \mid (10a + b) \iff 7 \mid (a - 2b).$$

- (b) Bestimmen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem
(i) keine, (ii) genau eine, (iii) unendlich viele Lösungen hat.

$$rx + y + z = 1$$

$$x + ry + z = 1$$

$$x + y + rz = 1$$

- (c) Geben Sie ein externes direktes Produkt zyklischer Gruppen an, das isomorph ist zur Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/40\mathbb{Z})^\times$.
(Hinweis: Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen.)
- (d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren des Endomorphismus

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 30. Es bezeichnen U_3 und U_5 jeweils eine 3- und eine 5-Sylow-Gruppe von G . Zeigen Sie:

- (a) Mindestens eine der Gruppen U_3 und U_5 ist ein Normalteiler von G .
- (b) Ist U_3 normal, so hat G/U_3 eine Untergruppe vom Index 2. Ist U_5 normal, so hat G/U_5 eine Untergruppe vom Index 2.
- (c) G hat eine Untergruppe U_{15} vom Index 2.
- (d) Zeigen Sie, dass alle 3-Sylow-Gruppen und alle 5-Sylow-Gruppen von G in U_{15} enthalten sind.
- (e) Folgern Sie, dass G genau eine 3-Sylow-Gruppe und genau eine 5-Sylow-Gruppe hat.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

Es sei $R = \{x + y\sqrt{-31} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

- (a) Begründen Sie, dass R ein Ring ist.
- (b) Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.
Hinweis: Beachten Sie $32 = (1 + \sqrt{-31})(1 - \sqrt{-31})$.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Seien p und q zwei Primzahlen. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - q \in K[X]$ für die Grundkörper $K = \mathbb{Q}$, \mathbb{R} und \mathbb{C} .

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Es sei \mathbb{F}_{625} der endliche Körper mit 625 Elementen mit Primkörper P . Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{625}$ mit $P(a) = \mathbb{F}_{625}$.