

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

- (a) Es sei (A, \cdot) eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi: A \rightarrow A, \quad a \mapsto a^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

- (b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass die entsprechende Aussage für beliebige Gruppen im Allgemeinen falsch ist.
- (c) Mit \mathfrak{A}_4 werde die alternierende Gruppe über vier Buchstaben bezeichnet. Bestimmen Sie diejenigen $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für die es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\phi: \mathfrak{A}_4 \rightarrow \mathbb{Z}/(n)$ gibt.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

- (a) Geben Sie die Definition von *Nullteilerfreiheit* eines kommutativen Rings an.
- (b) Bestimmen Sie alle Nullteiler und Einheiten sowie die Inklusionen aller Ideale des kommutativen Rings $\mathbb{Z}/(27)$.

Aufgabe 3

(12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass jeder irreduzible Faktor von $f := X^4 - 25 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel über \mathbb{Q} ist.
- (b) Bestimmen Sie ein primitives Element eines Zerfällungskörpers L von f über \mathbb{Q} und die Dimension von L über \mathbb{Q} .
- (c) Berechnen Sie die Automorphismengruppe von L über \mathbb{Q} .
- (d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ und ihre Inklusionen.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines endlichen Körpers eine Primzahl ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem endlichen Körper K eine Potenz der Charakteristik von K ist.
- (c) Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen; die Charakteristik von K sei ungleich 2. Berechnen Sie die Mächtigkeit der Bahn des Elementes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$$

unter der Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ durch Konjugation.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Seien K ein Körper und $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen V und W . Seien

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \quad \text{und} \quad W^* := \mathrm{Hom}_K(W, K)$$

die Dualräume, sowie $f^*: W^* \rightarrow V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, die duale Abbildung.

- (a) Sei v_1, \dots, v_n eine K -Basis von V . Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.
- (b) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann ist f^* surjektiv.
- (c) Zeigen Sie: Ist f^* surjektiv, dann ist f injektiv.