Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die komplexe 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Berechnen Sie die Matrix A^{2022}.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe G der Ordnung 100 an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass jede Gruppe G der Ordnung 100 auflösbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G der Ordnung 100 genau dann abelsch ist, wenn es in G lediglich eine 2-Sylowgruppe gibt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl und R ein kommutativer Ring (mit Einselement). Betrachten Sie für $a, b \in R$ das Ideal $I = (a, b) \subseteq R$.

(a) Zeigen Sie: Aus $a^n = b^n = 0$ folgt $I^{2n} = 0$.

(b) Nehmen Sie an, dass $2 = 1 + 1$ eine Einheit von R ist und dass $c^2 = 0$ für alle $c \in I$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $ab = 0$ folgt.

(c) Geben Sie einen kommutativen Ring R mit Elementen $a, b \in R$ an, für welche $a^2 = b^2 = 0$ und $ab \neq 0$ gilt. Begründen Sie, dass diese beide Eigenschaften für den von Ihnen angegebenen Ring erfüllt sind.
Tipp: Betrachten Sie $R = \mathbb{Q}[X, Y]/I$ für ein geeignetes Ideal I.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien p eine Primzahl und $n > 0$ eine natürliche Zahl. Seien $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ endliche Körper mit p bzw. p^n Elementen.

(a) Sei zunächst $n = 2$. Zeigen Sie: Für jedes $a \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$ gilt $\mathbb{F}_p(a) = \mathbb{F}_{p^2}$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{p^2}$ mit $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{F}_p(a)$.

(c) Sei jetzt $n = 6$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{p^6}$ mit $\mathbb{F}_{p^6} = \mathbb{F}_p(a)$ genau $p^6 - p^3 - p^2 + p$ beträgt.

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen, normierten Polynome $f \in \mathbb{F}_p[X]$ vom Grad 6.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachten Sie die Teilkörper $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ von $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Für das Kompositum $L = K_1 K_2$ gilt $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(b) Beweisen Sie: $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$.

(c) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

(d) Zeigen Sie, dass $L/\cancel{K}$ galoissch ist und bestimmen Sie die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bis auf Isomorphie. $\mathbb{Q}$

(e) Bestimmen Sie sämtliche Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$.