Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

1. Zeigen Sie, dass durch
$$K = (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[T]/(T^3 - 2)$$
ein Körper mit 343 Elementen gegeben wird.

2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom der komplexen Zahl $z = \pi + \mathrm{e}i$ über $\mathbf{R}$.

3. Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Polynom
$$f(X) = X^{2021} + 105\,X^{103} + 15\,X + 45$$
über folgenden Körpern K irreduzibel ist:

   (a) $K = \mathbf{Q}$,
   (b) $K = \mathbf{R}$,
   (c) $K = \mathbf{F}_2$,
   (d) $K = \mathbf{Q}[T]/(f(T))$
   (e) Begründen Sie, dass $\mathbf{Q}[T]/(f(T))$ ein Körper ist.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie alle Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynoms $f(X){:}= X^4 + 2$ über $\mathbf{F}_3$.

2. Berechnen Sie die galoissche Gruppe von $f(X)$ über $\mathbf{F}_3$.

3. Sei α eine Nullstelle von $g(X){:}= X^4 + 2$ in einem algebraischen Abschluss von $\mathbf{F}_5$. Zeigen Sie, dass dann auch 2α, 3α und 4α Nullstellen von $g(X)$ sind.

4. Zeigen Sie, dass das Polynom $g(X)$ über $\mathbf{F}_5$ irreduzibel ist.

5. Berechnen Sie die galoissche Gruppe von $g(X)$ über $\mathbf{F}_5$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3

Seien G eine (endliche) Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf eine weitere Gruppe H.

1. Zeigen Sie, dass H auflösbar ist, wenn G auflösbar ist.
2. Zeigen Sie, dass H entweder trivial oder einfach ist, wenn G einfach ist.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, falls $a^n = 0$ für eine natürliche Zahl n.

1. Begründen Sie, warum in einem Körper das einzige nilpotente Element a das Element $a = 0$ ist.
2. Zeigen Sie, dass das *Nilradikal*

   $$\mathfrak{n} := \{a \in R \mid a \text{ ist nilpotent}\}$$

   ein Ideal ist.
3. Zeigen Sie, dass das Nilradikal in jedem Primideal $\mathfrak{p}$ des Ringes R enthalten ist.
4. Berechnen Sie das Nilradikal des (endlichen) Ringes $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, wobei $\ell \geq 1$ eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 5

1. Geben Sie mit Begründung eine mögliche Abbildungsmatrix des Frobenius-Homomorphismus

   $$F\colon \mathbf{F}_{25} \to \mathbf{F}_{25},$$

   aufgefasst als Endomorphismus des $\mathbf{F}_5$-Vektorraumes $\mathbf{F}_{25}$, an.
2. Bestimmen Sie die Anzahl der Unterkörper, die der endliche Körper $\mathbf{F}_{81}$ besitzt.