Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie alle Nullteiler und alle Einheiten im Ring $\mathbb{Z}/(12)$.

(b) Bestimmen Sie die Mächtigkeit des Kerns einer surjektiven linearen Abbildung

$$\psi : \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^2,$$

wobei $\mathbb{F}_5$ ein Körper mit 5 Elementen ist.

(c) Gegeben sei die Permutation $\varphi \in S_9$ mit folgender Wertetabelle:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(k)$	5	9	6	8	4	2	1	7	3

Schreiben Sie φ als Produkt von elementfremden Zykeln, und bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k \geq 1$ mit $\varphi^k = \mathrm{id}$.

(d) Es sei U der Untervektorraum

$$U = \mathrm{span}(x-1, \quad x^2-x, \quad x^2-1, \quad x^{10}+x^8, \quad x^{10}-x^6)$$

von $V = \mathbb{R}[x]$ (der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$). Bestimmen Sie die Dimension von U.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 2

In der Gruppe $GL_2(\mathbb{Q})$ der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{Q}$ wähle $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

und $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass a und b endliche Ordnungen haben, und bestimme diese Ordnungen.

(b) Zeigen Sie, dass $c = ab$ keine endliche Ordnung hat.

(12 Punkte)

Aufgabe 3

Für eine endliche Gruppe G und eine Primzahl p, die die Ordnung von G teilt, bezeichnen wir mit n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen in G.

(a) Es seien G eine endliche Gruppe und $p, q \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene Primzahlen, die die Ordnung von G teilen. Angenommen, $n_p = n_q = 1$. Es seien H_1 die einzige p-Sylowgruppe und H_2 die einzige q-Sylowgruppe in G.

Zeigen Sie, dass die Elemente von H_1 und H_2 miteinander kommutieren, d. h. für alle $x \in H_1$ und für alle $y \in H_2$ gilt $xy = yx$.

(b) Es sei G eine Gruppe der Ordnung 12.

(i) Zeigen Sie, dass nicht gleichzeitig $n_2 = 3$ und $n_3 = 4$ gelten kann.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $n_2 = n_3 = 1$ die Gruppe G abelsch ist und es bis auf Isomorphie genau zwei verschiedene Möglichkeiten für G gibt.

(12 Punkte)

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass $R_1 := \mathbb{Q}[X]/(X^4 + 12X - 2)$ ein Integritätsbereich ist.

(b) Zeigen Sie, dass $R_2 := \mathbb{Z}[X]/(2, X^2 + X + 1)$ ein Körper ist. Wie viele Elemente besitzt dieser Körper?

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5

Es sei $K = \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C}$ und $\alpha := \sqrt[4]{7} \in \mathbb{R}$. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $f := X^4 - 7 \in K[X]$ über dem Grundkörper K.

(a) Zeigen Sie, dass $L = K(\alpha)$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Grade der Körpererweiterungen $[L : \mathbb{Q}]$ und $[L : K]$ und begründen Sie Ihre Antworten.

(c) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung L/K galoissch ist.

(d) Es sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma(\alpha) = i\alpha$. Bestimmen Sie damit $\sigma^2(\alpha)$ und folgern Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle$ gilt.

(12 Punkte)