Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Definieren Sie den Begriff *Integritätsbereich.*

(b) Formulieren Sie den *Kleinen Satz von Fermat.*

(c) Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $f(X) = X^3 + aX^2 - (3+a)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.
Zeigen Sie, dass f keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat.

(d) Seien $P_1, P_2, \ldots, P_5 \in \mathbb{R}^2$ mit $P_j = (x_j, y_j)$ für $j = 1, \ldots, 5$.
Zeigen Sie, dass $P_1, \ldots, P_5$ auf einem (möglicherweise entarteten) Kegelschnitt liegen, d.h., es gibt $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, nicht alle null, mit

$$ax_j^2 + bx_jy_j + cy_j^2 + dx_j + ey_j + f = 0 \qquad \text{für alle } j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem für a, b, c, d, e, f.

(12 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $f(X) = X^3 + aX^2 - (3+a)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(1/(1-\alpha)) = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

(12 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die der Faktorring $R = \mathbb{R}[X]/\langle X^2 - a\rangle$

(a) ein Integritätsbereich ist;

(b) ein Körper ist;

(c) isomorph zum Produktring $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $n \geq 0$, für die $2^n + 3$ bzw. $2^n + 5$ durch 3, 5, 7 bzw. 13 teilbar ist.

(b) Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ mit der Eigenschaft, dass sowohl $2^n + 3$ als auch $2^n + 5$ Primzahlen sind.

(12 Punkte)

Aufgabe 5

Das *Zentrum* einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe G ist die Untergruppe

$$Z(G) = \{z \in G \mid \forall g \in G\colon gz = zg\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.

(b) Sei D die Diedergruppe der Ordnung 12. Bestimmen Sie $Z(D)$.

(c) Bestimmen Sie die Struktur der Faktorgruppe $D/Z(D)$.

(12 Punkte)