Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und

$$G := SL_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \det A = 1\}$$

die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K und Determinante 1. Wir betrachten die Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to \mathrm{Mat}(n \times n, K),$$
$$F((a_{ij})) = (a_{ij}^p).$$

Zeigen Sie, dass $F(G) \subseteq G$ gilt und dass $F|_G\colon G \to G$ ein Homomorphismus von Gruppen ist. Folgern Sie daraus, dass $H = \{g \in G \mid F(g) = g\}$ eine Untergruppe von G ist, und bestimmen Sie diese Untergruppe.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Man zeige:

(a) Die symmetrische Gruppe S_5 hat genau sechs 5-Sylowuntergruppen.

(b) S_6 hat eine zu S_5 isomorphe und transitiv auf $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ operierende Untergruppe.

(c) S_6 hat zwei zu S_5 isomorphe Untergruppen, die nicht zueinander konjugiert sind.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $S = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Man zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ gibt. (Bemerkung: Ringhomomorphismen $R \to S$ bilden definitionsgemäß 1_R auf 1_S ab.)

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper, $n \geq 1$, und $\mu_A(X) \in K[X]$ das Minimalpolynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Sei $f(X) \in K[X]$ ein Polynom, das zu $\mu_A(X)$ teilerfremd ist. Man zeige, dass die Matrix $f(A)$ invertierbar ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen. Man zeige, dass das Polynom $X^2 + X + 1$ genau dann irreduzibel über K ist, wenn $q \equiv -1 \pmod 3$.

(12 Punkte)