Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei f ein Endomorphismus des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$, und es sei M die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind:

a) f ist eine Orthogonalprojektion auf einen Unterraum der Dimension k.

b) Die Matrix M ist idempotent (d.h. $M^2 = M$), symmetrisch und hat Spur k.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n} k^2$ genau dann durch n teilbar ist, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist.

$\left(\textit{Hinweis: } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$ (8 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe, und es sei $(H, \cdot)$ eine Gruppe mit einem Normalteiler $N \trianglelefteq H$ vom Index 2. Zeigen Sie:

a) Sind $x, y \in H \setminus N$, dann ist $xy \in N$.

b) Die auf $A \times H$ definierte Verknüpfung

$$(a, x) \circledast (b, y) := \begin{cases} (a + b, xy), & \text{falls } x \in N, \\ (a - b, xy), & \text{falls } x \in H \setminus N, \end{cases}$$

ist assoziativ.

Im Folgenden darf ohne Beweis benutzt werden, dass $A \times H$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe mit neutralem Element $(0_A, 1_H)$ bildet.

c) Ist $x \in H \setminus N$ der Ordnung 2, und ist $a \in A$, dann hat (a, x) in der Gruppe $(A \times H, \circledast)$ die Ordnung 2.

d) Es gibt eine Gruppe der Ordnung 42, die weder ein Element der Ordnung 6 noch ein Element der Ordnung 14 enthält.

(16 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es seien $1 < D \in \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-D}\right]$.

a) Zeigen Sie: Die Einheitengruppe von R ist $R^* = \{\pm 1\}$.

Ferner sei $D := 13$.

b) Zeigen Sie, dass 2 und $1 + \sqrt{-13}$ in R irreduzibel sind.

c) Zeigen Sie, dass $2 \in R$ kein Primelement ist.

Hinweis: Man benutze die Normabbildung $N(a + b\sqrt{-D}) = a^2 + Db^2$. (12 Punkte)

Aufgabe 5:

Für eine primitive fünfte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ gilt die Formel

$$\zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}\,;$$

diese Formel kann im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ über $\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie: $i \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

(12 Punkte)