## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**
Man bestimme alle Paare von Primzahlen $p, q$ mit $p^2 - 2q^2 = 1$. (10 Punkte)

**Aufgabe 2:**
Es sei $f(X) \in K[X]$ ein nicht konstantes Polynom ohne mehrfache Nullstellen in einem Zerfällungskörper. Man zeige, dass $f(X)$ ein Teiler des Polynoms $f(X + f(X))$ ist.

(10 Punkte)

**Aufgabe 3:**
Sei $p$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ keine $p$–te Potenz in $\mathbb{Z}$. Man zeige, dass das Polynom $X^p - a$ über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.
(Hinweis: Betrachte die Nullstellen von $X^p - a$ in $\mathbb{C}$ und untersuche den konstanten Term eines echten Teilers von $X^p - a$ auf Ganzzahligkeit.) (12 Punkte)

**Aufgabe 4:**

a) Die Gruppe $G$ operiere transitiv auf einer Menge $\Omega$ mit $|\Omega| > 1$. Man zeige: Hat jedes Element aus $G$ mindestens einen Fixpunkt, dann ist $G$ eine Vereinigung der Konjugierten $hUh^{-1}$, $h \in G$, einer echten Untergruppe $U$ von $G$. (8 Punkte)

b) Für $n > 1$ sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen. Man gebe eine echte Untergruppe $U$ von $G$ an, so dass $G$ die Vereinigung der Konjugierten von $U$ ist. (Hinweis: Betrachte die Operation von $G$ auf den 1–dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{C}^n$.) (10 Punkte)

**Aufgabe 5:**
Sei $p$ eine Primzahl und $q = p^n$, $n > 0$. Weiter sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p$. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $f(X) = X^q - X$ einen Unterkörper von $K$ bilden.

(10 Punkte)