Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Wir betrachten die komplexen (2×2)-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $G = \{\pm E, \pm A, \pm B, \pm C\}$.

a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G. (5 Punkte)

c) Welche Untergruppen sind Normalteiler von G? (5 Punkte)

Aufgabe 2:
Gegeben sei ein Element c aus einem kommutativen Ring R. Für $a, b \in R$ definieren wir $a \equiv b \pmod{c}$ genau dann, wenn es ein $d \in R$ gibt mit $a - b = c \cdot d$.

a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf R definiert. (2 Punkte)

b) Es sei nun $R = \mathbb{Z}$. Finden Sie alle Lösungen $y \in \mathbb{Z}$ der Kongruenz

$$51y \equiv 34 \pmod{85}.$$

(5 Punkte)

c) Es sei nun $R = \mathbb{Q}[X]$. Finden Sie alle Lösungen $f \in \mathbb{Q}[X]$ der simultanen Kongruenzen

$$f \equiv 1 \pmod{(X^2+1)} \quad \text{und} \quad f \equiv X \pmod{(X^2-1)}.$$

(5 Punkte)

d) Es sei wieder $R = \mathbb{Z}$. Ist die Kongruenz $y^2 + 97y \equiv 3 \pmod{101}$ lösbar für $y \in \mathbb{Z}$? (3 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten die Teilmenge $R = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist. (2 Punkte)

b) Beweisen Sie, dass R ein euklidischer Ring ist bezüglich der Normfunktion $d(\alpha) := |\alpha|^2$. (5 Punkte)

c) Geben Sie alle möglichen Faktorisierungen von $8 - i\sqrt{2}$ in irreduzible Elemente von R an (bis auf Reihenfolge). (8 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $x^3 - \pi$ über dem Grundkörper $K = \mathbb{Q}(\pi)$. Sie dürfen im Folgenden verwenden, dass π ein über $\mathbb{Q}$ transzendentes Element ist.

a) Bestimmen Sie den Grad $[L : K]$. (5 Punkte)

b) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$, indem Sie jeweils ein primitives Element β angeben mit $F = K(\beta)$. (7 Punkte)

c) Welche dieser Zwischenkörper sind normale Erweiterungen von K? (3 Punkte)