Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 168, die genau 5 Untergruppen der Ordnung 42 hat. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist. (12 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $L \supseteq K$ eine endliche Galoiserweiterung. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in L$ folgende Aussagen äquivalent sind: (10 Punkte)

a) Es gilt $L = K(\alpha)$.

b) Für alle $g \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $g \neq \mathrm{id}_L$ gilt $g(\alpha) \neq \alpha$.

Aufgabe 3:

Es seien K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K. Es seien weiter m, n nichtnegative ganze Zahlen. Zeigen Sie:

a) Ist $m > 0$, dann ist $x^r - 1$ der Rest bei Division von $x^n - 1$ durch $x^m - 1$, wobei r der Rest bei Division von n durch m ist. (5 Punkte)

b) Sei $g = \mathrm{ggT}(m, n)$. Dann ist $x^g - 1$ ein größter gemeinsamer Teiler von $x^n - 1$ und $x^m - 1$ in $K[x]$. (7 Punkte)

Aufgabe 4:

Seien A, B komplexe $(n \times n)$-Matrizen mit $AB = BA$.

a) Man zeige, dass B jeden Eigenraum von A invariant lässt, d.h.:
Für jeden Eigenraum U von A gilt $Bu \in U$ für alle $u \in U$. (3 Punkte)

b) Man zeige, dass A und B einen gemeinsamen Eigenvektor haben, d.h.:
Es gibt $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $Av = \lambda v$, $Bv = \mu v$. (5 Punkte)

c) Man zeige anhand eines Beispiels, dass die Aussage aus b) ohne die Voraussetzung $AB = BA$ im Allgemeinen nicht gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 5:

Es seien p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[t]$. Wie üblich sei $\mathbb{F}_p(t^p)$ der kleinste Teilkörper von $\mathbb{F}_p(t)$, der t^p enthält.

a) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^p - t^p \in \mathbb{F}_p(t^p)[X]$ irreduzibel ist. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p(t) \supseteq \mathbb{F}_p(t^p)$ endlich und normal, aber nicht separabel ist. (8 Punkte)