Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine **kurze** Begründung an:

a) Die Gruppen $Z_6 \times Z_{10}$ und $Z_2 \times Z_{30}$ sind isomorph (Z_n bezeichne dabei die zyklische Gruppe der Ordnung n).

b) Die alternierende Gruppe A_4 ist eine einfache Gruppe.

c) In der symmetrischen Gruppe S_5 sind alle Elemente der Ordnung 2 konjugiert.

d) In $\mathbb{Z}[X]$ ist (X) ein Primideal.

(8 Punkte)

Aufgabe 2:

Es seien G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Begründen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung p in G durch $p-1$ teilbar ist, d. h.,

$$|\{a \in G \mid \operatorname{ord}(a) = p\}| = (p-1) \cdot k \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $M_a = \{a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$ für $a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$.)

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle Teiler von 6 im Ring in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + \sqrt{-6} \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f = X^4 + 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Begründen Sie, dass f irreduzibel ist.

b) Warum ist die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ galoissch?

c) Es sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Begründen Sie, dass $\beta := \alpha^3 + 3\alpha$ eine Nullstelle von f ist.

d) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha) = L$ gilt.

e) Wie viele Elemente enthält die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$?

f) Ist die Galoisgruppe zyklisch? Begründen Sie Ihre Antwort. (Hinweis: Betrachten Sie den $\mathbb{Q}$-Automorphismus σ, der durch $\sigma(\alpha) = \beta$ gegeben ist, und bestimmen Sie $\sigma^2(\alpha)$.)

(10 Punkte)