## Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Zeigen Sie: Eine ungerade Primzahl $p$ ist Teiler einer Zahl $n^2 + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $p \equiv 1 \pmod 4$ gilt. (7 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Zeigen Sie: Ist $G$ eine endliche Gruppe, so existiert eine natürliche Zahl $n$ derart, dass $G$ isomorph ist zu einer Untergruppe der alternierenden Gruppe $A_n$. (6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

a) Beweisen Sie, dass
$$f := X^3 + X^2 - 2X - 1$$
in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

b) Zeigen Sie, dass $f$ eine reelle Nullstelle $\alpha$ im offenen Intervall $]1, 2[$ besitzt.

c) Zeigen Sie, dass neben $\alpha$ auch $-\frac{1}{\alpha+1}$ Nullstelle von $f$ ist.

d) Folgern Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von $f$ ist.

e) Wie viele Elemente enthält die Galoisgruppe von $f$ über $\mathbb{Q}$?

(10 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Es sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \to L$ ein $K$-Endomorphismus von $L$, also $\sigma|_K = id_K$.
Beweisen Sie, dass $\sigma$ ein $K$-Automorphismus von $L$ ist. (7 Punkte)