

Thema Nr. 2  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Vorbemerkung:**

Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

**Aufgabe 1:**

Betrachten Sie die folgenden vier nicht abelschen Gruppen der Ordnung 24:

$$S_4, D_{12}, D_6 \times \mathbb{Z}_2, S_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Dabei ist  $S_n$  die symmetrische Gruppe auf  $n$  Elementen,  $D_n$  die Diedergruppe mit  $2n$  Elementen und  $\mathbb{Z}_2$  die zyklische Gruppe der Ordnung 2.

- a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in allen vier Gruppen.
- b) Bestimmen Sie (mit Begründung), welche der vier Gruppen zueinander isomorph sind (und welche nicht).

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Es wird der Unterring  $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  von  $\mathbb{C}$  betrachtet.

Mit  $\varphi: R \rightarrow \mathbb{N}_0, a + ib\sqrt{2} \mapsto a^2 + 2b^2$  als euklidischer Funktion ist  $R$  ein euklidischer Ring (darf benutzt werden).

- a) Welche der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 sind Primelemente in  $R$ ?
- b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von 6 und  $4 + i\sqrt{2}$  in  $R$ .

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Sei  $R[X]$  der Polynomring über einem faktoriellen Ring  $R$ . Beweisen Sie das sogenannte Gauß'sche Lemma:

Seien  $0 \neq f, g \in R[X]$ . Sind  $f$  und  $g$  primitiv, so auch ihr Produkt  $fg$ .

(Ein Polynom  $f \neq 0$  heißt primitiv, wenn seine Koeffizienten teilerfremd sind.)

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Bestimmen Sie eine  $\mathbb{Q}$ -Basis des Erweiterungskörpers  $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  von  $\mathbb{Q}$  und stellen Sie  $x^{-1}$  für  $x = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$  als Linearkombination dieser Basis dar.

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Wie viele Zwischenkörper hat der Zerfällungskörper von  $f = X^3 - 3X^2 + 5$  über  $\mathbb{Q}$ ?

Was sind die Grade dieser Körper über  $\mathbb{Q}$  und welche dieser Körper sind galoissch über  $\mathbb{Q}$  (Antworten mit Begründung).

(6 Punkte)