

**Thema Nr. 2**

(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

**Aufgabe 1** (4 Punkte):

Beweisen Sie den Satz von Lagrange: Ist  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe, so ist  $|H|$  ein Teiler von  $|G|$ .

**Aufgabe 2** (8 Punkte):

- Zeigen Sie, dass eine nichtabelsche einfache Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_6$  bereits in der alternierenden Gruppe  $A_6$  liegt.
- Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 120 gibt.

**Aufgabe 3** (5 Punkte):

Seien  $R$  und  $S$  Ringe (mit 1). Zeigen Sie, dass die (zweiseitigen) Ideale des direkten Produktes  $R \times S$  die Form  $I \times J$  haben mit Idealen  $I$  bzw.  $J$  von  $R$  bzw.  $S$ .

**Aufgabe 4** (6 Punkte):

Es seien  $p$  und  $q$  Primzahlen. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad  $q$  über dem Körper  $\mathbb{F}_p$ .

**Aufgabe 5** (7 Punkte):

Beweisen Sie mit Mitteln der Algebra, dass das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, das regelmäßige Siebeneck aber nicht.