Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Alle Antworten und Zwischenbehauptungen müssen begründet werden.*

Aufgabe 1:

Sei S_7 die symmetrische Gruppe aller Permutationen von $\{1,...,7\}$.

a) Gibt es einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to S_7$?

b) Gibt es einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to S_7$?

Aufgabe 2:

Sei $K = \mathbb{Q}(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten über $\mathbb{Q}$, und sei f das Polynom

$$f(Y) = 1 + XY + (XY)^2 + (XY)^3 + (XY)^4 + (XY)^5 + (XY)^6$$

in $K[Y]$. Ist f irreduzibel in dem Ring $K[Y]$?

Aufgabe 3:

Sei K eine algebraische Erweiterung des Körpers k und R ein Ring mit $k \subset R \subset K$. Folgt dann, dass R ein Körper ist?

Aufgabe 4:

Sei f ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in einem Körper k. Der Zerfällungskörper K von f über k habe den Grad n! über k. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist, und dass die Galoisgruppe von f über k die symmetrische Gruppe S_n ist.

Aufgabe 5:

Sei C_p eine zyklische Gruppe der Ordnung p. Bestimmen Sie die Anzahl der Automorphismen der Gruppe $C_p \times C_p \times C_p$.