Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Geben Sie jeweils ohne Begründung an:

a) alle abelschen Gruppen der Ordnung 40 bis auf Isomorphie (und jeden Isomorphietyp nur einmal),

b) die Anzahl der Konjugiertenklassen der symmetrischen Gruppe S_4,

c) die Menge aller $x \in \mathbb{Z}$, die gleichzeitig $(x \equiv 5 \mod 11)$ und $(x \equiv 3 \mod 7)$ erfüllen,

d) eine $\mathbb{Q}$-Basis des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta := \exp(2\pi i/5)$,

e) das Minimalpolynom von $\sqrt{1+\sqrt{7}}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G| = 380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

a) Es seien G eine endliche, einfache Gruppe und p eine Primzahl mit $p \mid |G|$.
Zeigen Sie, dass es keine Untergruppe H von G gibt mit der Eigenschaft $1 < [G : H] < p$.
Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Operation von G auf den Linksnebenklassen von H.

b) Beantworten Sie mit Begründung:
Gibt es in der alternierenden Gruppe A_5 eine Untergruppe der Ordnung 15?

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Es seien $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\beta := \sqrt{2-\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha)$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie ein Polynom f in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad 4 mit der Nullstelle α.

Im Folgenden können Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ als bekannt voraussetzen.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichheit $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ von Unterkörpern von $\mathbb{C}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $(\alpha-\beta)^2$.

c) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und geben Sie die Ordnung der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ an.

d) Geben Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ an.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Sei q eine Primpotenz und $\mathbb{F}_q$ ein Körper der Ordnung q.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{F}_q$ die Gleichung $a^q = a$ gilt.

b) Sei $\varphi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ eine Abbildung und setze

$$f := \sum_{a \in \mathbb{F}_q} \varphi(a)(1-(X-a)^{q-1}) \in \mathbb{F}_q[X].$$

Zeigen Sie die Gleichheit $f(b) = \varphi(b)$ für alle $b \in \mathbb{F}_q$.