Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom und $\zeta_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Seien $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teilerfremd.

a) Zeigen Sie, dass $\zeta_a \zeta_b$ eine primitive ab-te Einheitswurzel ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_a \zeta_b) = \mathbb{Q}(\zeta_a, \zeta_b)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass Φ_a in $\mathbb{Q}(\zeta_b)[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

a) Sei $P := p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von P mit teilerfremden $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann a ein Teiler von p_0 und b ein Teiler von p_n sind.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $P := p_0 + p_1 X + \cdots + p_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbb{Q}[X]$ und $Q := q_0 + q_1 X + \cdots + q_{m-1} X^{m-1} + X^m \in \mathbb{Z}[X]$ normierte Polynome.
Zeigen Sie: Wenn PQ ganze Koeffizienten hat (also in $\mathbb{Z}[X]$ liegt), dann hat auch P ganze Koeffizienten.

c) Zerlegen Sie das Polynom $P := X^4 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ in über $\mathbb{R}$ irreduzible Polynome.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Für $t \in \mathbb{Q}$ betrachten wir die rationale 2×2-Matrix

$$A_t := \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_t.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_t.

c) Bestimmen Sie die Menge derjenigen $t \in \mathbb{Q}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

d) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$A_t^n = \begin{pmatrix} 1-nt & nt \\ -nt & 1+nt \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und G eine transitiv auf $\Omega := \{1, 2, \ldots, n\}$ operierende Gruppe. Sei weiter U eine Untergruppe von G mit zu n teilerfremdem Index $[G : U]$. Zeigen Sie, dass auch U transitiv auf Ω operiert.
Hinweis: Sei G_1 der Stabilisator von 1 in G. Betrachten Sie die Indizes in den Ketten $G_1 \cap U \leq G_1 \leq G$ und $G_1 \cap U \leq U \leq G$ und drücken Sie die Länge der Bahn von U durch 1 mittels G_1 und U aus.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Sei k ein Körper mit positiver Charakteristik p und $\lambda \in k \setminus \{0\}$. Sei $L := k(t)$, wobei t ein über k transzendentes Element sei. Wir betrachten den k-linearen Körperautomorphismus $\sigma\colon L \to L$, der t auf $t + \lambda$ abbildet. Sei L^σ der Unterkörper von L, der von σ elementweise fixiert wird.

a) Zeigen Sie, dass für $\eta := t^p - \lambda^{p-1}t$ die Gleichheit $\sigma(\eta) = \eta$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass t algebraisch über L^σ ist.

c) Sei $m \in L^\sigma[X]$ ein Polynom mit t als Nullstelle. Zeigen Sie, dass dann auch $t + \ell\lambda$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ Nullstellen von m sind.
Hinweis: Die Menge $\{t + \ell\lambda \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \{t, t + \lambda, \ldots, t + (p-1)\lambda\}$ ist endlich, da k die Charakteristik p hat.

d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von t über L^σ.

e) Zeigen Sie, dass die Erweiterung L/L^σ eine Galoiserweiterung ist und dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/L^\sigma)$ von σ erzeugt wird.