Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Behauptungen jeweils mit einer kurzen Begründung an, ob sie wahr oder falsch ist.

a) Jede Gruppe der Ordnung 49 ist zyklisch.

b) Jede Körpererweiterung vom Körpergrad 2 ist separabel.

c) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$ ist normal.

d) Sind G und H zwei Gruppen, so dass ihr Produkt $G \times H$ abelsch ist, so sind auch G und H abelsch.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen von $a^2 + b^2 = 4^n$ mit $a, b, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der normierten irreduziblen Faktoren des Polynoms $f := X^{256} - X$ in $\mathbb{F}_2[X]$ mit ihren jeweiligen Graden. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise kurz.
Hinweis: Betrachten Sie die Nullstellen von f in $\mathbb{F}_{256}$ und dessen Unterkörper.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Seien G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Mit U bezeichnen wir die Vereinigung aller zu H konjugierten Untergruppen gHg^{-1} für $g \in G$. Zeigen Sie mit jeweils kurzen Beweisen:

a) Sind $g_1, \ldots, g_n \in G$ Repräsentanten der Linksnebenklassen von G modulo H, so gilt

$$U \setminus \{1\} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(g_i H g_i^{-1} \setminus \{1\} \right).$$

b) Die Menge U hat höchstens ord $G - [G : H] + 1$ Elemente.

c) Wenn H jeweils mindestens ein Element einer jeden Konjugationsklasse von G enthält, dann gilt schon $H = G$.

d) Sei G eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass G ein Element ohne Fixpunkt besitzt (d. h. es gilt $g(i) \neq i$ für alle $i = 1, \ldots, n$).
Hinweis: Betrachten Sie $H := \{g \in G \mid g(1) = 1\}$.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

Seien K ein Körper positiver Charakteristik p, $\alpha \in K$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit jeweils kurzen Begründungen:

a) Die p-te Potenz A^p von A ist die Einheitsmatrix.

b) Wenn $\alpha \neq 0$ gilt, dann ist A nicht diagonalisierbar.

c) Seien L ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und B eine quadratische Matrix über L mit der Eigenschaft, dass die Potenz B^k für ein geeignetes $k \geq 1$ die Einheitsmatrix ist. Dann ist B diagonalisierbar.