

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!  
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

**Aufgabe 1**

(12 Punkte)

Es sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Eine quadratische  $(n \times n)$ -Matrix  $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  heißt *nilpotent*, wenn ein  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  mit  $B^k = 0$  existiert. Wir bezeichnen mit  $\text{Nil}_n(\mathbb{C})$  die Teilmenge der nilpotenten Matrizen in  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ .

- a) Begründen Sie, warum eine nilpotente Matrix  $B$  in  $\text{Nil}_n(\mathbb{C})$  nur den Eigenwert 0 hat. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $\chi_B(X) \in \mathbb{C}[X]$  für  $B \in \text{Nil}_n(\mathbb{C})$ .
- b) Die allgemeine lineare Gruppe  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  operiert auf der Menge  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  durch Konjugation  $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ,  $(A, B) \mapsto ABA^{-1}$ . Dies dürfen Sie ohne Beweis benutzen. Zeigen Sie, dass diese Operation eine Operation von  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  auf der Teilmenge  $\text{Nil}_n(\mathbb{C})$  induziert.
- c) Bestimmen Sie für  $n := 4$  mit Hilfe der Jordanschen Normalform die Anzahl der Bahnen für die in b) angegebene Operation der Gruppe  $\text{GL}_4(\mathbb{C})$  auf der Menge  $\text{Nil}_4(\mathbb{C})$ .

**Aufgabe 2**

(12 Punkte)

Sei  $p$  eine Primzahl,  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und  $\mathbb{F}_q$  ein Körper mit  $q := p^n$  Elementen.

- a) Begründen Sie, warum  $\text{ord } \text{GL}_2(\mathbb{F}_q) = (q-1)^2 q(q+1)$  für die allgemeine lineare Gruppe  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$  über dem Körper  $\mathbb{F}_q$  gilt.
- b) Begründen Sie, warum  $\text{ord } \text{SL}_2(\mathbb{F}_q) = (q-1)q(q+1)$  für die spezielle lineare Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  über dem Körper  $\mathbb{F}_q$  gilt.
- c) Begründen Sie, warum jede Untergruppe von  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  der Ordnung  $q$  konjugiert zur Untergruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q \right\}$$

von  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  ist. Begründen Sie, warum  $H$  kein Normalteiler in  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$  ist.

**Aufgabe 3**

(12 Punkte)

Es seien  $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Weiter gelte auch  $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \in \mathbb{Z}$ .

- a) Es sei  $f(X) := (X - \frac{ab}{c})(X - \frac{bc}{a})(X - \frac{ca}{b}) \in \mathbb{Q}[X]$ . Zeigen Sie, dass  $f$  ganzzahlige Koeffizienten hat.
- b) Zeigen Sie, dass die rationalen Zahlen  $\frac{ab}{c}$ ,  $\frac{bc}{a}$  und  $\frac{ca}{b}$  bereits in  $\mathbb{Z}$  liegen.

**Aufgabe 4**

(12 Punkte)

Wir betrachten das Polynom  $f := X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ .

- a) Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$  in den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ .
- b) Für  $\alpha := \sqrt{2 - \sqrt{2}} \in \mathbb{R}$  sei  $L := \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$ . Berechnen Sie den Grad  $[L : \mathbb{Q}]$ .
- c) Begründen Sie, warum die Elemente  $\sqrt{2}$  und  $\beta := \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  im Körper  $L$  liegen. Folgern Sie, dass  $L$  ein Zerfällungskörper für  $f$  über  $\mathbb{Q}$  ist. Begründen Sie, warum  $L|\mathbb{Q}$  eine Galois-Erweiterung ist.
- d) Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmtes  $\sigma \in \text{Gal}(L|\mathbb{Q})$  mit  $\sigma(\alpha) = \beta$  existiert. Berechnen Sie  $\sigma(\sqrt{2})$  und  $\sigma^2(\alpha)$ . Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe von  $L|\mathbb{Q}$  zyklisch ist.

**Aufgabe 5**

(12 Punkte)

Es sei  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  der endliche Körper mit drei Elementen.

- a) Bestimmen Sie alle normierten, irreduziblen Polynome vom Grad 2 in  $\mathbb{F}_3[X]$ .
- b) Begründen Sie, warum der Faktorring  $K := \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$  ein Körper ist. Geben Sie die Anzahl der Elemente dieses Körpers  $K$  an.
- c) Zerlegen Sie das Polynom  $f := X^8 - 1$  im Polynomring  $\mathbb{F}_3[X]$  in irreduzible Faktoren.
- d) Geben Sie ein Polynom  $g$  in  $\mathbb{F}_3[X]$  an, dessen Restklasse in  $K$  eine primitive 8-te Einheitswurzel ist.