Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Für einen Körper K sei $G(K) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in K \right\}.$

(a) Zeigen Sie, dass $G(K)$ eine abelsche Untergruppe von $\mathrm{GL}(3, K)$ ist.

(b) Für eine Primzahl p sei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper mit $|\mathbb{F}_p| = p$. Entscheiden Sie begründet, zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen $G(\mathbb{F}_p)$ isomorph ist. (Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen)

(c) Für eine Primzahl p sei $\mathbb{F}_{p^2}$ der endliche Körper mit $|\mathbb{F}_{p^2}| = p^2$. Entscheiden Sie begründet, zu welchem direkten Produkt zyklischer Gruppen $G(\mathbb{F}_{p^2})$ isomorph ist. (Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei R der Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(X^3 + X)$.

(a) Zeigen Sie, dass R zum Produktring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[i]$ isomorph ist.

(b) Geben Sie sämtliche Einheiten des Ringes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[i]$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Elemente $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass die Restklasse von $X^2 + aX + b$ in R eine Einheit ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $f = X^{2024} + 2024 \in \mathbb{Z}[X]$. Wir definieren die Iterierten von f als $f_0 = X$ und $f_{n+1} = f(f_n) = f_n^{2024} + 2024$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie:

(a) f ist irreduzibel.

(b) Für alle $n \geq 1$ gilt $f_n(0) \equiv 2024 \bmod 2024^2$.

(c) f_n ist irreduzibel für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $a \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle von f.

(a) Zeigen Sie durch Polynomdivision, dass $f(X^2 - 2)$ durch $f(X)$ teilbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass a und $a^2 - 2$ verschiedene Nullstellen von f sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist, deren Galoisgruppe zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\zeta_{16} = e^{\frac{2\pi i}{16}} \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_{16})/\mathbb{Q}(i)$ eine Galoiserweiterung vom Grad 4 ist.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ζ_{16} über $\mathbb{Q}(i)$.

(c) Entscheiden Sie begründet, ob die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta_{16})/\mathbb{Q}(i)$ zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph ist.