

Thema Nr. 3  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!  
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

**Aufgabe 1**

(12 Punkte)

Sei  $G$  eine (nicht notwendig endliche) Gruppe und sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$ .

- a) Geben Sie die Definition des Index  $[G : H]$  von  $H$  in  $G$  an.
- b) Zeigen Sie: Falls der Index von  $H$  in  $G$  zwei ist, so ist  $H$  bereits ein Normalteiler in  $G$ .
- c) Finden Sie ein Beispiel für  $G$  und  $H$  mit Index  $[G : H] = 3$  derart, dass  $H$  kein Normalteiler in  $G$  ist.

**Aufgabe 2**

(12 Punkte)

Sei  $G$  eine endliche Gruppe mit mehr als zwei Elementen und gelte  $a^{-1} = a$  für alle  $a \in G$ . Zeigen Sie:

- a) Die Gruppe  $G$  ist abelsch.
- b) Es existiert eine Untergruppe  $H$  von  $G$  der Ordnung 4.
- c) Für das Produkt aller Gruppenelemente in  $G$  gilt  $\prod_{a \in G} a = 1$ .

**Aufgabe 3**

(12 Punkte)

Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

- a) Die Körpererweiterung ist algebraisch.
- b) Jeder Ring  $R$  mit  $K \subseteq R \subseteq L$  ist bereits ein Körper.

**Aufgabe 4**

(12 Punkte)

Sei  $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{5}) \in \mathbb{C}$ .

- a) Zeigen Sie: Das Minimalpolynom von  $\alpha := \zeta + \zeta^4$  über  $\mathbb{Q}$  ist durch  $x^2 + x - 1$  gegeben.
- b) Begründen Sie, dass  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$  gilt, und geben Sie die Elemente der Galoisgruppe von  $\mathbb{Q}(\zeta)$  über  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  an.

**Aufgabe 5**

(12 Punkte)

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$  der Charakteristik  $\neq 2$  und  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $V$  mit  $\varphi^2 = \text{id}_V$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  diagonalisierbar ist.
- b) Begründen Sie, dass die Aussage aus Teilaufgabe a) im Allgemeinen falsch ist, wenn  $K$  die Charakteristik 2 hat.