Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

(12 Punkte)

…ufgabe 1

…eweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine Gruppe, in der jedes nichttriviale Element entweder Ordnung 2 oder Ordnung 1013 hat und Elemente beider Ordnungen vorkommen. (Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass 1013 eine Primzahl ist.)

b) Es gibt eine abelsche Gruppe, in der jedes nichttriviale Element entweder Ordnung 2 oder Ordnung 1013 hat.

c) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zwei Matrizen, welche dasselbe charakteristische Polynom sowie dasselbe Minimalpolynom über $\mathbb{C}$ haben. Dann sind A und B ähnlich.

(12 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für reelle quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichne A^T die Transponierte von A. Ferner bezeichne E_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Sei nun $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch (d. h. $S^T = -S$). Man zeige:

a) Ist λ ein reeller Eigenwert von S, dann gilt $\lambda = 0$.
(Hinweis: Man transponiere die Eigenwertgleichung $Sv = \lambda v$.)

b) $E_n + S$ ist invertierbar.

c) $E_n - S$ und $(E_n + S)^{-1}$ kommutieren.

d) $M = (E_n - S)(E_n + S)^{-1}$ ist orthogonal (d. h. $MM^T = E_n$).
(Hinweis: Es gelten die Identitäten $(AB)^T = B^T A^T$ und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{F}_{2^r}$. Wir betrachten das Polynom $f := x^2 + x + c$ über $\mathbb{F}_{2^r}$. Für $a \in \mathbb{F}_{2^r}$ sei $T(a) := \sum_{i=0}^{r-1} a^{2^i}$ und $\phi(a) := a^2 + a$. Zeigen Sie:

a) $a \mapsto T(a)$ und $a \mapsto \phi(a)$ sind additive Gruppenhomomorphismen $\mathbb{F}_{2^r} \to \mathbb{F}_{2^r}$.

b) $\mathrm{im}(T) = \ker(\phi) = \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{2^r}$.

c) $\mathrm{im}(\phi) = \ker(T)$.

d) f hat genau dann Nullstellen in $\mathbb{F}_{2^r}$, wenn $T(c) = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass es mindestens vier Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung 18 gibt.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Seien $f := x^5 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ und K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ mit der Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.

a) Bestimmen Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler H mit den folgenden beiden Eigenschaften enthält:

   i) $H \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

   ii) $G/H \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

c) Zeigen Sie, dass G nicht abelsch ist.