Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

a) Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann einfach ist, wenn G eine Gruppe der Ordnung p ist.

Im Weiteren sei G stets eine Gruppe der Ordnung $p^m q$ mit einer Primzahl p und $q, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Es gelte $p \nmid q$. Es sei P eine p-Sylowuntergruppe von G.

b) Zeigen Sie, dass es einen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \longrightarrow S_q$ mit $\ker(\varphi) \leq P$ gibt, wobei S_q die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, \ldots, q\}$ bezeichnet.

c) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe G der Ordnung $p^m q$ mit p, q, m wie oben und $p^m \nmid (q-1)!$ gibt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Wir betrachten das Polynom $f := X^4 - 6X^2 - 3$ in $\mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$.

Seien nun α, β Nullstellen von f wie in Teilaufgabe a) mit $\alpha \neq \pm\beta$.

b) Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ und $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ gelten.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ galoissch über $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ist und bestimmen Sie die Struktur der Galoisgruppe.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl und bezeichne $a \mapsto \bar{a}$ die Restklassenabbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $h \mapsto \overline{h(0)}$, ein surjektiver Homomorphismus von Ringen ist.

b) Zeigen Sie, dass $\ker(\varphi) = (p, x)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass (p, x) ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[x]$ ist.

d) Begründen Sie, ob (x) ein Primideal in $\mathbb{Z}[x]$ ist.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring. Ein Idempotent ist ein Element $e \in R$ mit der Eigenschaft e^2 (12 Pu

a) Sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: In $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ gibt es genau zwei Idempotente.

Im Folgenden sei $N = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Idempotenten in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

c) Berechnen Sie explizit ein Idempotent $e \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $e \equiv 0 \pmod{20}$ und $e \equiv 1 \pmod{37}$

Aufgabe 5

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $(-,-) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische und positiv semi-definite (12 Punkte
Bilinearform.

Sie dürfen die folgende Aussage ohne Beweis verwenden:
Für alle v, w in V gilt $(v,v)(w,w) \geq (v,w)^2$.

a) Zeigen Sie, dass $U := \{v \in V \mid (v,v) = 0\}$ ein linearer Unterraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\langle v_1 + U, v_2 + U \rangle := (v_1, v_2)$$

mit U aus Teilaufgabe a) wohldefiniert ist und ein (positiv-definites) Skalarprodukt auf V/U liefert.