Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________ Kennwort: ____________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2025**	**63912**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Elemente in G gilt:
$$|G| = p(p-1)^2(p+1)\ .$$

b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

c) Zeigen Sie, dass es mehr als eine p-Sylow-Untergruppe in G gibt.

d) Sei nun speziell $p = 3$ und
$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G.$$
Zeigen Sie, dass der Normalisator $N := \{g \in G \mid g \cdot H = H \cdot g\} \subseteq G$ von H in G aus den oberen Dreiecksmatrizen in G besteht. Folgern Sie, dass G genau vier 3-Sylow-Gruppen besitzt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Für $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ betrachte man $R_b := \{\frac{a}{b^k} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass R_b ein Teilring von $\mathbb{Q}$ und damit ein kommutativer Ring mit Eins ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Einheitengruppe gilt:
$$(R_b)^\times = \left\{ \frac{a}{b^k} \in R_b \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und es existieren } c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } \ell \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } ac = b^\ell \right\}.$$

c) Zeigen Sie, dass R_b ein Hauptidealbereich ist und jedes Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ die Form $\mathfrak{a} = R_b \cdot w$ für ein $w \in \mathbb{Z}$ hat.
Hinweis: Offenbar gilt $\mathbb{Z} \subseteq R_b$. Betrachten Sie für ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd R_b$ den Durchschnitt mit $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ eine (3×3)-Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi_A(X)$ und $\mathbb{Q}(\alpha)$ der davon erzeugte Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{C}$. Betrachten Sie die Multiplikation mit α:

$$\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha) \ , \ x \mapsto \alpha \cdot x \ .$$

a) Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von φ bezüglich der Basis $1, \alpha, \alpha^2$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und zeigen Sie, dass deren charakteristisches Polynom identisch mit dem von A ist, also $\chi_B(X) = \chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.

c) In der Situation von b): Zeigen Sie, dass die beiden Matrizen A und B, betrachtet in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, ähnlich sind.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, die die Gruppenordnung $|G|$ teilt. Seien ferner $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p^\times$ die Einheitengruppe von $\mathbb{F}_p$. Wir definieren

$$M := \{ \ g \in G \mid \mathrm{ord}(g) = p\}$$

als die Menge aller Gruppenelemente, deren Ordnung gleich p ist.

a) Zeigen Sie, dass durch
$$\mathbb{F}_p^\times \times M \to M \ , \ ([a], g) \mapsto g^a$$
eine Gruppenoperation definiert ist.

b) Sei $g \in M$ ein beliebiges Element. Zeigen Sie, dass der Stabilisator
$$(\mathbb{F}_p^\times)_g := \{ \ [a] \in \mathbb{F}_p^\times \mid g^a = g\} \subseteq \mathbb{F}_p^\times$$
von $g \in M$ trivial ist, also $(\mathbb{F}_p^\times)_g = \{[1]\}$ gilt.

c) Folgern Sie, dass $|M|$ ein Vielfaches von $p-1$ ist.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^{15} - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Sei $L|\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie den Körpergrad $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 15 besitzt.

c) Sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}(\alpha^5)$ den Körpergrad $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^5)] = 5$ besitzt.