1. Ein gewöhnlicher Bruch ist eine Zahl p, die aus zwei natürlichen Zahlen besteht und die Form $p = \frac{a}{b}$ besitzt. Dabei muss $b \neq 0$ sein, da eine Division ~~nennt man~~ durch Null nicht definiert ist. Bei dieser Division nennt man den Divident (a) den Zähler und den Divisor (b) den Nenner des Bruchs. Getrennt werden Zähler und Nenner durch einen Bruchstrich: $\frac{a}{b} \hat{=} \frac{Z}{N}$ Zähler Bruchstrich Nenner

Man unterscheidet bei den gewöhnlichen Brüchen zwischen echten und unechten Brüchen. Bei einem echten Bruch ist der Zähler größer als der Nenner (z.B. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$). Bei einem unechten Bruch ist der Zähler genauso groß wie der Nenner (z.B. $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{6}{6}$) oder der Zähler ist größer als Nenner (z.B. $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{6}$). Im letzten Fall kann man den unechten Bruch auch als gemischten Bruch darstellen d.h. durch eine natürliche Zahl und den Rest des Bruches bzw. einen echten Bruch (z.B. $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$). Dezimiert gibt es eine Unterscheidung in gleichnamige und ungleichnamige Brüche. Gleichnamige Brüche liegen nur, wenn bei Brüche, mit denen eine Rechnung durchgeführt werden soll, denselben Nenner besitzen (z.B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ / $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ / $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ / $\frac{1}{2} : \frac{2}{2} = 1$)

Grundsätzlich bezeichnet man aber alle Brüche, die einen gleichen Nenner aufweisen als Gleichnamig. Haben Brüche nicht denselben Nenner, so spricht man von ungleichnamigen Brüchen (z.B. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}$)

Eine weitere Abgrenzung ist diejenige in den Bruchzahlen. Während der gewöhnliche Bruch als ein geordnetes Paar von natürlichen Zahlen verstanden wird ($(2,3) \hat{=} \frac{2}{3}$), stellen die Bruchzahlen Äquivalenzklammern (d.h. Teilmengen, die durch eine Äquivalenzrelation auf einer Menge entstehen) unendlicher Brüche dar. Innerhalb dieser Äquivalenzklasse haben alle Brüche denselben Wert bzw. sind Repräsentanten eines Bruches.

(z.B. $\underbrace{\text{Bruchzahl } \frac{1}{3}}_{\text{Äquivalenzklasse}}$; $\underbrace{\frac{3}{9} ; \frac{4}{12}}_{\text{Repräsentanten der Bruchzahl } \frac{1}{3}}$)

Die Dezimalbrüche hingegen stellen grundsätzlich eine andere Schreibweise von gewöhnlichen Brüchen dar (d.h. die Kommaschreibweise z.B. $\frac{1}{5} = 0{,}2$ / $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$)
Diese Schreibweise nennt man Dezimalschreibweise. Die Stellen hinter dem Komma nennt man die Dezimalen (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, ...)

Die Dezimalbrüche unterteilt man nach dem Ergebnis der Division von Zählern und Nenner ($\frac{Z}{N} = Z : N$). Geht diese Dimision auf (d.h. kein Rest), so spricht man von den endlichen Dezimalbrüchen:

z.B. $\frac{1}{5} = 1 : 5 = 0{,}2$ ($\Rightarrow$ kein Rest)

Diese endlichen Dezimalbrüche lassen sich auch als sog. „Zehnerbrüche" darstellen, d.h. wenn man sie als gewöhnlichen Bruch schreibt, dann haben sie eine Zahlenpotenz als Nenner.
(z.B. $\frac{1}{10} = 0{,}1$ / $\frac{25}{100} = 0{,}25$ / $\frac{35}{100} = 0{,}35$ ...)
Es lassen dabei alle gewöhnlichen Brüche in Zehnerpotenzen umwandeln durch Ermittern (mit Fakten 2 und 5) deren Nenner nun aus den Faktoren 2 und 5 bestehen.

z.B. $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$\frac{1}{25} = \frac{1 \cdot (2 \cdot 2)}{25 \cdot (2 \cdot 2)} = \frac{4}{100} = 0{,}04$

$\frac{1}{16} = \frac{1 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}{16 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)} = \frac{625}{10000} = 0{,}0625$

Geht die Division von Zählern und Nenner nicht auf so unterscheidet man zwischen unendlichperiodischen und unendlich - nicht periodischen Dezimalbrüchen.
Die unendlich - periodischen Dezimalbrüche zeichnen sich dadurch aus, dass die Ziffern ~~Rheinfolge~~ hinter dem Komma sich in periodischer Rheinfolge wiederholen (z.B. $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ / $\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$).

Dezimalbrüche, die unendlich-nicht-periodisch sind, sind nicht als Dezimalbrüche darstellbar. Sie fallen die Menge der irrationalen Zahlen IR (z.B. π, √, e).
Bei diesem kommt es zu keiner periodischen Wiederholung der Ziffern nach dem Komma (z.B. π = 3,141512 ...). In der Hauptschule werden nur ~~an~~ endliche Dezimalbrüche behandelt.

2) Mögliche Schülerfehler können beim Umgang mit Dezimalbrüchen in mehreren Bereichen auftreten.

$\boxed{\text{Erstens}}$ beim Umwandeln von endlich Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche. Hier kann der Fehler auftreten, dass die SuS (≙ Schüler und Schülerinnen) die falsche Dezimalstelle (d.h. die erste nach Komma) zur Umwandlung nutzen.
(z.B. $0,\underline{25} \neq \frac{25}{10} \neq \frac{5}{2}$). Den SuS nun in diesem Fall gezeigt werden, dass immer die letzte Dezimalstelle als Dezimalbruch Auskunft über die Höhe der Zehnerpotenz im Nenner gilt.
(z.B. $0,1\underline{25}$ ⇒ 3. Stelle ≙ Tausenstel ⇒ $\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$)

$\boxed{\text{Zweitens}}$ bei schriftlichen Rechenverfahren wie der Addition bzw. Subtration kann es passieren, dass die Zahlen nicht gemäß ihrer Position im dekadirden Stellenwertsystem untereinander geschrieben werden und sich somit die Summe bei der Differenz verändert.

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ +\ 0,4 \\ \hline 1,29 \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{r} 1,25 \\ -\ 0,4 \\ \hline 1,21 \end{array}$$

Diese Fehler können dadurch vermieden werden, indem man Dezimalbrüche vor dem ausrechnen zuest immer in ein Stellenwertsystem eintragen lässt und anhand dessen die Regel „Bei Addition + Subtration müssen die Kommas der Dezimalbrüche immer untereinander stehen

H	Z	E	,	z	h	t	zt
		1	,	2	5		
		0	,	4			
		0	,	8	5		

Drittens

-Bei der Multiplikation zweier Dezimalbrüche miteinander kann es passieren, dass es auch hier zu einer Verschiebung im dekadischen Stellenwertsystem kommt:

$$
\begin{array}{r}
\underline{2 \cdot 1{,}25} \\
200 \\
4 \\
10 \\
\hline
2{,}410
\end{array}
$$

Auch hier kann die Hilfestellung, alle Kommas untereinander zu schreiben helfen. Wichtiger jedoch ist es, dem Schüler zu zeigen, dass eine Dezimale, die zunächst im Hundertstelbereich stand und durch Multiplikation ihren Wert ~~erhält~~ erhöht hat, nun in den Zehntelbereich verrückt und nicht im Tausendstelbereich verbleibt.

$$
\begin{array}{r}
\underline{2 \cdot 1{,}25} \\
2{,}00 \\
0{,}40 \\
{,}10 \\
\hline
2{,}50
\end{array}
$$

Viertens

Bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen kann es passieren, dass nach dem Umwandeln der Dezimalbrüche in natürliche Zahlen, das nachträgliche Einreichen der Kommastelle beim Ergebnis vergessen wird bzw. wenn zwei Dezimalbrüche miteinander multipliziert werden, nur die Stellen des einen Dezimalbruchs eingerückt werden.

z.B.: $0{,}12 \cdot 0{,}12 = 0{,}0144$

$\Rightarrow 12 \cdot 12 = 144$

$\neq 1{,}44$ (nur 2 Stellen statt 4 Stellen eingerückt)

Diesr Fehler kann vermieden werden, wenn gemeinsam ~~mit~~ mit SuS eine Rechenregel erarbeitet wird, die diesen Fehler aufgreift und somit für die Zukunft verhindert. $\Rightarrow 0{,}12 \cdot 0{,}12$ (4 Stellen merken)

$12 \cdot 12 = 144$

$= 0{,}0144$

$\Rightarrow$ Rechenregel

3.) Die folgende Unterrichtsstunde soll eine Erarbeitung der Regel für die Multiplikation von Dezimalbrüchen darstellen

1. Sachanalyse

Da der Begriff Dezimalbruch bereits im ersten Abschnitt (siehe 1.)) dieser Arbeit beschreiben werden, wird dieser nicht näher beschrieben und dementsprechend auf die ~~Auf~~ Ausführungen des ersten Abschnitts vermieden. Dementsprechend wird hier nun auf die Multiplikation von Dezimalbruchen eingegangen. Grundsätzlich werden in der Hauptschule aber nur endliche Dezimalbrüche verwendet. Zunächst muss man zwei Arten der Multiplikation beachten. Erstens die Multiplikation eines Dezimalbruchs mit einer ~~..~~ natürlichen Zahl (z.B. 2 · 1,25) oder die Multiplikation von zwei Dezimalbrüchen miteinander (z.B. 1,25 · 1,25). In beiden Fällen lautet die Regel: Den oder die Dezimalbrüche in natürliche Zahlen umwandeln (Stellen hinter Komma malen (a)), Rechnung ausführen (b) und beim Ergebnis das Komma gemäß der Anzahl der Stellen hinter dem Komma, die der eine oder beide Dezimalbrüche aufweisen, von rechts nach links einrücken (c).

2 · 1,25 => 2 · 125 = 250 => 2,50

a) zwei Stellen (merken)

b) umwandeln in natürliche Zahl rechnen

c) ← zwei Stellen von einrücken

1,25 · 1,25 => 125 · 125 = 15625 => 1,5625

(2) (2)

a) vier Stellen (merken)

b) umwandeln in natürliche Zahlen rechnen

c) vier Stelle nach rechts einrücken

2. Lehrplanbezug

Die Multiplikation von endlichen Dezimalbrüchen wird in der Hauptschule in der 6. Jahrgangsstufe eingeführt.

3. Lernvoraussetzungen

Die Schüler haben bereits den Begriff Dezimalbruch in der 5. Klasse kennengelernt und die Addition & Subtraktion mit Dezimalbrüchen durchgeführt. Die SuS kennen das dekadische ~~Stellungs~~ Stellenwertsystem und können die Ziffern des Dezimalbruchs diesem System zu ordnen. Die SuS können die Multiplikation mit natürlichen Zahlen durchführen.

4. Methodisch- didaktische Analyse

Als Einstieg dient die Frage des Lehrers, worauf bei der Multiplikation von natürlicher Zahlen geachtet werden muss. Daraufhin werden von einzeln Schülern kleine Multiplikationsaufgaben an der Tafel gelöst. Dies dient dem Zweck, die Multiplikation zu wiederholen.

Im Anschluss daran wird eine Aufgabe an die Klasse gegeben, die eine Multiplikation von einer natürlichen Zahl mit einem Dezimalbruch beinhaltet. Diese Aufgabe soll in Partnerarbeit berechnet werden, um den SuS die Möglichkeit zu geben sich gemeinsam mit der Problemstellung zu befassen. In einem darauf folgenden Lehrer - Schüler - Gespräch werden entstandene Probleme wie z. B. falsche Stellung des Kommas oder falsche Herangehensweise an Rechenweg besprochen. Dabei erkennen die Schüler, dass zur Berechnung einer Multiplikation von Dezimalbrüchen eine Rechenregel benötigt wird. Das Stundenthema wird an die Tafel geschrieben, um es allen SuS zu verdeutliche. Darauf folgt die Frage des Lehrers, was bei der Multiplikation von natürlichen Zahlen einfacher ist als bei der mit Dezimalbrüchen (DZ). Daraufhin erkennen die Schüler, dass man den DZ zunächst in eine natürliche Zahl verwandelt, da diese einfachen zu berechnen sind und die bekannte Vorgehensweise angewendet werden kann. Dementsprechend erarbeitet der Lehrer mit den Schülern, dass nach dieser Umwandlung beim Ergebnis

Rückwandlung stattfinden muss. Daraus lassen sich die einzelnen Schritte der Rechenregel ableiten, die von den SuS formuliert und an ~~bei~~ die Tafel geschrieben werden. Dies dient dazu die Schritte in schülergerechte Sprache darzustellen. Durch den Tafelanschrieb entsteht das Tafelbild mit den Rechenwege (a, dass von den Schülern als Sicherung in ihr Eintragsheft übernommen wird. ~~Dieser~~

Nach diesem Eintrag wird in den letzten Phase der Unterrichtsstunde die Rechenregel an einfachen Aufgaben angewendet, um deren Einsatz zu vertiefen. Dabei ~~ist~~ handelt es sich um leistungsstärkeren Schülern, die die Rechenregel schneller verinnerlicht haben, auch Aufgaben zu geben, bei denen Dezimalbrüche mit Dezimalbrüchen multipliziert werden. Durch diese Differenzierung kann Unter-/ Überladung vermieden werden. Desweiteren kann in einem Lehrer-Schüler Gespräch die Anwendung der Rechenregel bei Multiplikation vom Dezimalbruch mit Dezimalbruch von den Schülern selbst erklärt werden. So können diese leistungsstarken Schüler ~~d~~ als Tutoren auftreten und den leistungsschwächeren die Übertragung der Rechenregel erklären.

5. Lernziele

- Grobziel: Die Schüler sollen die Regel für die Multiplikation von Dezimalbrüchen kennenlernen und anwenden können.

- Feinziele:

Die Schüler sollen, ...

(LZ1) - die Multiplikation von natürlichen Zahlen wiederlegen

(LZ2) - Schwierigkeiten, die bei der Multiplikation mit Dezimalbrüchen entstehen können, erkennen.

(LZ3) - erkennen, dass eine Rechenregel notwendig ist.

(LZ4) - schrittweise eine Rechenregel erarbeiten können

(LZ5) - die Rechenregel anwenden können.

6. Artikulationsschema (Zeitansatz 45min)

Phase/ Zeit	Inhalt	Sozialform, Lernziele	Medien
Einstieg 5 min	L: Löse folgende Aufgabe: 1250 · 45 was muss man beachten? S: - Stellen ordentlich untereinander schreiben - Alle Ziffern geordnet multiplizieren - Ergebnis: 6250	L-S - Gespräch LZ 1 erfüllt	Tafel
Erarbeitung 20min	L: Löse folgende Aufgabe: 1,25 · 3 → SuS erkennen Schwierigkeiten bei dieser Multiplikation ⇒ Stundenthema: „Rechenregel für Multiplikation mit Dezimalbrüchen" Schritte der Rechenregel: 1. Dezimalbruch in natürliche Zahl umwandeln + Stellen hinter Komma merken 2. Ausrechnen 3. Ergebnis wieder in Dezimalbruch umwandeln → Einrücken der gemerkten Kommastellen von rechts nach links	PA L-S-G / LZ 2 erfüllt LZ 3 erfüllt LZ 4 erfüllt	Block-heft Tafel Tafel
Sicherung 10min	SS tragen Schritte der Rechenregel vor.	EA	Heft

Vertiefung 10 min	- SS arbeiten in EA an einfachen Aufgaben mit Rechenregel - L: Aufgabe: 1,25 · 1,25 => Schüler wenden Rechenregel an	EA L-S-Gespräch LZ 5 erfüllt	Heft

7. Anhang:

Tafelbild

> **Multiplikation von Dezimalbrüchen**
>
> Rechenregelschritte:
>
> 1. In natürlichen Zahl umwandeln + Stellen nach Komma merken — $1,\underbrace{25}_{2\,\text{Stellen}} \hat{=} 125$
> 2. Ausrechnen — $125 \cdot 3 = 375$
> 3. In Dezimalbruch zurück wandeln
>   ↳ gemerkte Kommastellen von rechts nach links einrücken — $375 \hat{=} 3,75$

4.) Die Umwandlung kann wie folgt beschrieben werden und erfolgt in beide Richtungen.

1) Umwandlung von gewöhnlichen Bruch in Dezimalbruch

-Schriftliche Rechnung:

$\frac{2}{5} = 2:5 = 0,4$ (Rest 0)
20 : 5
Rest 0

Hier werden Zähler und Nenner in einer Division bzw. einem schriftlichen Rechenverfahren geteilt. Entsteht dabei kein Rest so entsteht ein endlicher Dezimalbruch, gibt es einen Rest so entsteht ein unendlich periodischer Dezimalbruch. Entsteht ein unendlich nicht periodischer Dezimalbruch, so ist eine Umwandlung nicht möglich.

- Erweitern des Nenners auf eine Zehnerpotenz

z.B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ | $\frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ | $\frac{1}{125} = \frac{8}{8} = \frac{8}{1000} = 0{,}008$

Dieses Verfahren funktioniert aber nur bei gewöhnlichen Brüchen, die einen Nenner besitzen, der aus den Faktoren 2 und 5 besteht.
Dabei wird der jeweilige gewöhnliche Bruch sowohl im Nenner als auch im Zähler erweitert, dem Ziel eine Zehnerpotenz im Nenner zu erhöhen. Dabei entstehen endliche Dezimalbrüche.

4.) b) Umwandlung von Dezimalbruch in gewöhnlichen Bruch

- geometrische Reihe (Verwendung bei unendlich-period. Dezimalbrüchen)
Bei diesem Verfahren werden die Stellen hinter dem Komma des Dezimalbruchs, die durch denn Periodenstrich gekennzeichnet werden, einfach als Zähler geschrieben und für jede Stelle der ~~Periode~~ Periode wird in den Nenner eine 9 geschrieben. Danach wird der gewöhnliche Bruch so weit wie möglich gekürzt.

z.B. $0{,}\overline{54} = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$

$0{,}\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

- Einteilung der Dezimalen des Dezimalbruches in Zehnerbrüche
(Verwendung bei endlichen Dezimalbrüchen)

Bei diesem Verfahren werden die einzelnen Dezimalen des Dezimalbruches als Zehnerbrüche dargestellt, deren Nenner von ihrer Position im Dezimalsystem abhängt, umgewandelt. Im Anschluss daran werden ~~deine~~ diese gewöhnlichen Brüche miteinander addiert.

z.B.

$$0{,}345 = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{345}{1000} = \frac{69}{200}$$

<u>Multiplikation mit einer Zehnerpotenz + Anschließende Division mit der gleichen Zehnerpotenz (bei endlichen Dezimalbrüchen)</u>

Bei diesem Verfahren wird zunächst der Dezimalbruch mit einer Zehnerpotenz multipliziert, deren Größe von der Anzahl der Stellen hinter dem Komma des Dezimalbruchs abhängt (z.B. $0{,}2 \mathrel{\hat{=}} 10^2$ / $0{,}345 \mathrel{\hat{=}} 10^3$).
Im Anschluss daran wird diese ganze Zahl wieder durch dieselbe Zehnerpotenz geteilt. Dabei wird diese Division als gewöhnlicher Bruch dargestellt.

z.B. $0{,}345 \cdot 10^3 = 345$

$345 : 10^3 = \frac{345}{1000}$