Thema Nr. 1

Aufgabe 1

Zwei Figuren (in diesem Fall Dreiecke) sind kongruent, wenn sie mithilfe einer Kongruenzabbildung ineinander überführt werden können. Das umgangssprachliche Wort für kongruent ist deckungsgleich.

Eine Kongruenzabbildung kann eine

- Achsenspiegelung
- Parallelverschiebung
- Drehung (im besonderen Fall 180°: Punktspiegelung)

oder eine Verkettung eben genannter Kongruenzabbildungen sein.

Eine Kongruenzabbildung besitzt folgende Eigenschaften:

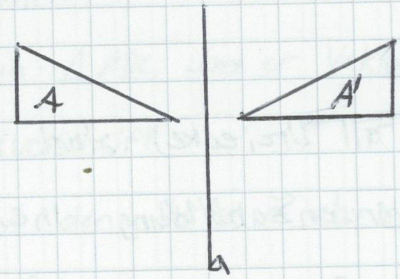
- sie ist geradentreu
- sie ist winkeltreu
- sie ist längentreu

Welche Eigenschaften die einzelnen Kongruenzabbildungen im Einzelnen haben, wird später bei der Beschreibung der einzelnen Kongruenzabbildungen näher erläutert.

Eine Kongruenzabbildung gehorcht auch der Äquivalenzrelation, d. h. • sie ist reflexiv: eine kongruente Figur ist immer zu sich selbst kongruent

- sie ist symmetrisch: Ist $A \cong B$, so ist auch $B \cong A$
- sie ist transitiv: Ist $A \cong B$ und $B \cong C$, so ist auch $A \cong C$

Sind zwei Dreiecke etwa so gegeben



lässt sich durch Einzeichnen der Spiegelachse a, das Dreieck A mithilfe einer Achsenspiegelung in das Dreieck A' überführen.
Die Achsenspiegelung ist eine Abbildung gemäß folgenden Vorschriften:

<u>1. Fall</u>: $P \notin a$

1. geg. Sei ein Urpunkt P eine Gerade a
2. Konstruktionsvorschrift:

2.1 Man befälle von P das Lot auf die Gerade a und bezeichne den Schnittpunkt mit X.

2.2 Man zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt X und Radius $\overline{XP}$

2.3 Man verlängere das Lot, bis sich der Kreis k und die Lotgerade im Schnittpunkt P' treffen.

2.4 P' ist Spiegelpunkt zu P.

Eine Achsenspiegelung ist eine Abbildung der Ebene auf sich, die jedem Punkt P bezüglich der Spiegelachse ihren Bildpunkt P' zuordnet.

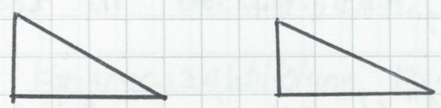
<u>2. Fall</u> : $P \in a$

1. geg. sei ein Urpunkt P und eine Gerade a

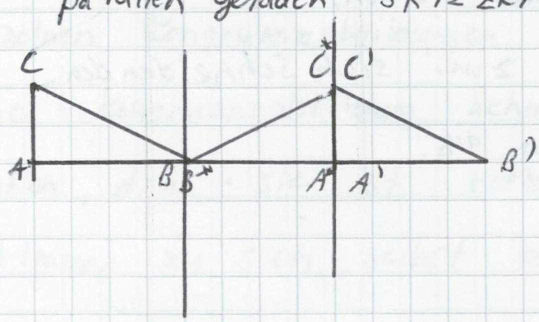
2.1 $P = P'$

Eine Achsenspiegelung ist längen-, geraden und winkeltreu. Den Umlaufsinn von Figuren und die Orientierung von Winkeln verändert sie jedoch.

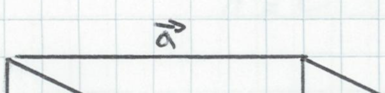
Sind zwei Dreiecke etwa in der Form gegeben,



lassen sie sich mithilfe einer Achsenspiegelung nicht mehr ineinander überführen.
Hier ist eine Doppelachsenspiegelung an zwei parallen Geraden nötig. Eine Doppelachsenspiegelung an zwei parallelen Geraden lässt sich durch eine Parallelverschiebung ersetzen.
Hier lautet die Abbildungsvorschrift, dass jeder Punkt durch gleich lange, parallele und gleich gerichtete Pfeile verschoben wird. Die Menge aller parallelen, gleich langen und gleich orientierten Pfeile wird Vektor genannt.
Hier der umständliche Weg der Doppelachsenspiegelung an zwei parallen Geraden skizziert:



Das lässt sich durch eine Parallelverschiebung ersetzen die wie folgt, aussicht. Eine Parallelverschiebung ist also orientierungstreu und erhält den von Figuren



Eine Parallelverschiebung ist eine Abbildung gemäß folgenden Vorschriften.

1. geg. sei ein ΔABC und er Vektor $\vec{a}$

2. Konstruktionsvorschrift

2.1. Trage an A den Vektor $\vec{a}$ ab; dabei ergibt sich A'.

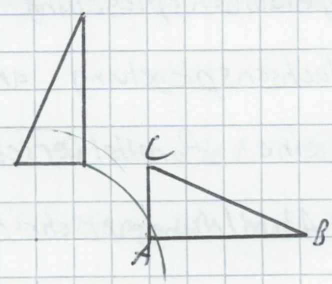
" " B " " " " ", " " B'

" " C " " " " ", " " " C'

2.2. Verbinde die Punkte A', B'', C' zu einem Dreieck

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

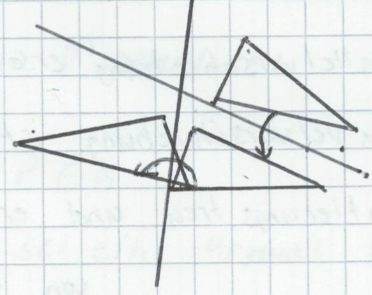
Sind die zwei Dreiecke etwa in folgender Art und weise gegeben;



lassen sie sich mithilfe einer Doppelachsenspiegelung an zwei Geraden, die sich schneiden, ineinander überführen. Die Doppelachsenspiegelung an zwei sich schneidenden Geraden kann auch durch eine Drehung ersetzt werden.

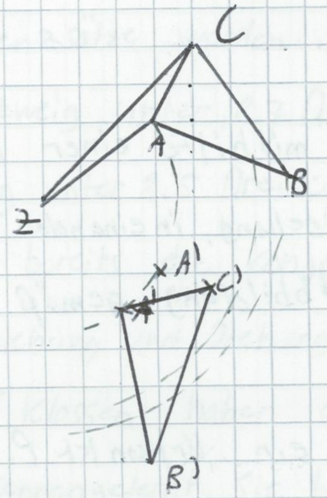
Eine Doppelachsenspiegelung an zwei sich schneidenden Geraden sieht folgendermaßen aus:

Skizze:



Diese Doppelachsenspiegelung an zwei sich schneidenden Geraden kann durch eine Drehung ersetzt werden, die wie folgt aussieht.

Skizze:



Eine Drehung ist eine Abbildung gemäß folgenden Vorschriften:

1. Fall: $P \neq Z$

1. geg. sei ein Drehzentrum Z, ein Drehwinkel x und ein Urpunkt P

2. Konstruktionsvorschrift:

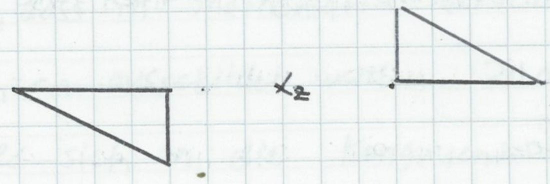
2.1. Man verbinde das Drehzentrum Z mit dem Urpunkt P zu einer Halbgeraden [ZP

2.2. Man zeichne die Halbgerade h so, dass sie den Anfangspunkt Z besitzt und mit der Halbgeraden [ZP den Winkel x einschließt.

2.3. Man zeichne den Kreis K mit Mittelpunkt Z und Radius $\overline{ZP}$. Der Schnittpunkt des Kreises K und der Halbgeraden h ist P'.

Eine Drehung ist ebenfalls zusätzlich orientierungstreu und erhält denn Umlaufsform von figuren

Dabei sehen die zwei Dreiecke folgendermaßen aus:



Diese zwei Dreiecke werden mithilfe einer Drehung von 180°, also mit einer Punktspiegelung, ineinander überführt. Eine Punktspiegelung ist eine Abbildung gemäß folgender Vorschriften:

1. geg. sei ein Drehzentrum Z und ein Urpunkt P.
2. Konstruktionsvorschrift

2.1 Verbinde das Drehzentrum Z und den Urpunkt P zu einer Geraden ZP.

2.2. Zeichne einen Kreis k mit Mittelpunkt Z und Radius $\overline{ZP}$. Der Schnittpunkt des Kreises k mit der Geraden ZP ist P'.

Im Allgemeinen lässt sich festhalten: Man muss schauen, wie die zwei Dreiecke zueinander stehen. Ist die Orientierung der Winkel und der Umlaufsinn der Figur erhalten oder hat diese(r) sich umgedreht? Dementsprechend muss man schauen, ob es eine Parallelverschiebung / Drehung oder eine Achsenspiegelung ist. Hat man zwei kongruente Dreiecke gegeben, muss man ermitteln, welche Kongruenzabbildung das eine Dreieck in das andere überführt.

→ Zusatz zu Thema ① S. 5.12

② Im Folgenden soll der Weg des entdeckendes Lernens für die Kongruenzsätze für Dreiecke im Mathematikunterrichts diskutiert werden.

Die Kongruenzsätze werden in der 8. Klasse behandelt, im Mathe-I-Zweig unter „8.7 Dreiecke und Vierecke", im Mathe-II/III-Zweig unter 8.5 Dreiecke und Vierecke. Die Schüler beherrschen bereits die Kongruenzabbildungen Achsenspiegelung, Parallelverschiebung und Drehung.

In der 6. Klassen haben die Schüler unter 6.8 die Achsenspiegelung kennengelernt. Sie haben achsensymmetrische Figuren aus dem Alltag näher kennengelernt und haben durch eigene Übungen die Eigenschaften und Abbildungsvorschrift einer Achsenspiegelung kennengelernt.

Unter 7.4 haben die Schüler die Parabelverschiebung als Doppelachsenspiegelung an zwei parallelen Geraden kennengelernt und dann die Abbildungsvorschrift der Parallelverschiebung kennengelernt.

Unter 7.5 haben sie gleich die nächste Kongruenzabbildung die Drehung kennengelernt. Im Mathe-I-Zweig wird die Drehung über eine Doppelachsenspiegelung zweier sich schneidenden Geraden eingeführt, im Mathe-II/III-Zweig wird auf diese Hinführung verzichtet.

Somit verfügen die Schüler über die nötigen Kongruenzabbildungen, um zwei kongruente Dreiecke zu Drehung zu bringen (S. 1)

Unter dem Aspekt der neuen Bildungsstandards wird verlangt, dass in Mathematik verschiedene mathematische Kompetenzen ausgebildet werden. In diesem Zusammenhang bietet es sich an, die Kongruenzsätze für Dreiecke durch entdeckendes Lernen zu erschließen. Dabei wird die Kompetenz K1: „mathematische Zusammenhänge herstellen" gefordert, da die Schüler zum Beispiel Teilfiguren einer Konfiguration erlernen sollen, z.B. ob sich zwei Figuren in endlich viele, paarweise zueinander kongruente Teilfiguren zerlegen lassen, um somit die Kongruenz der beiden Figuren nachzuweisen. Desweiteren wird die Kompetenz K2: „mathematisch formalisieren" gefordert, weil die Schüler zum Beispiel Äquivalenzkeiten bilden sollen („Wenn bei einem Dreieck da, das und das gegeben ist, ist es kongruent ...) Die anderen mathematisthen Kompetenzen wie mathematisch argumentieren/definieren/axiomatrisieren, spielen hier zwar auch eine Rolle, aber eher eine untergeordnete Rolle, weil der Hauptaugenmerk auf der Kompetenz ① und ② liegt.

Es gibt folgende Kongruenzsätze am Dreieck:

- Wenn zwei Dreiecke in den 3 Längen ihrer Seiten übereinstimmen, sind sie kongruent (SSS-Satz)

- Wenn zwei Dreiecke den Längen zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zwischen diesen beiden Seiten übereinstimmen, sind sie kongruent (SWS-Satz)

- Wenn zwei Dreiecke in dem Winkelmaß zweier Winkel und der Länge der eingeschlossenen Seite zwischen den zwei Winkeln übereinstimmen, sind sie kongruent (WSW-Satz)

· Wenn ~~zwar~~ zwei Bereiche in den Längen zweier Seiten und dem Winkelmaß des Winkels, der ~~der~~ größeren Seite gegenüberlegt, übereinstimmen, sind sie kongruent. (SsW-Satz)

Das entdeckende Lernen für Kongruenzsätze für Dreiecke würde folgendermaßen aussehen:

1. Den Schülern wird als erstes der Arbeitsauftrag gegeben, aus der Seite a=5cm und der Seite b=6cm ein Dreieck zu konstruieren.

Frage an die Schüler: „Ist die Konstraktion des Dreiecks eindeutig?"

Erwartete Schülerantwort: „Ist nicht eindeutig, es gibt mehrere Möglichkeiten für Dreiecke, deren Seite a=5cm und b=6cm sein soll."

2. Dann erfolgt wieder ein Arbeitsauftrag an die Schüler, welche Größe sie sich noch vorgeben müssen, damit dann alle Schüler das gleiche Dreieck erhalten würden.

Dabei sollen die Schüler zu folgendem Ergebnis kommen.

- Seite c (Eindeutigkeit nach SSS-Satz)
- Winkel α (entweder keine, eine oder zwei Möglichkeiten je nach Wahl des Winkels α)
- Winkel β (nach SsW-Satz)
- Winkel γ (nach SWS-Satz)

③ Im folgenden soll eine Abstraktion der vorherigen Aufgabe stadtfinden. Die Schüler sollen Aussagen formulieren, wie „Wenn ich zwei Seiten gegeben habe, brauche ich entweder die Aufgabe der 3 Seite, damit die Darstellung eindeutig ist, etc..

④ Den Schülern wird ein weiterer Arbeitsauftrag erteilt, Sie sollen heraus finden, ob durch andere zwei Vorgaben (winkel/winkel, seite/Winkel) ebenfalls wieder ein eindeutiges Dreieck entsteht. → Hinführung auf WSW-Satz

⑤ Im anschließenden Unterrichtsgespräch fragt der Lehrer, die Schüler, welchen Schluss sie bei folgender Frage ziehen würden?

- Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten
- und der dritten Seite
- und dem eingeschlossenen Winkel
- und dem Winkel, der der größeren Seite gegenüberliegt

übereinstimmen, was kann man dann über die beiden Dreiecke aussagen?

Erwartete Schülerantwort: „Die Dreiecke sind gleich"

⑥ Einführung des Begriffes „kongruent" und Sicherung der Kongruenzsätze mit einem Tafelanschrieb und Hefteintrag.

Nun sollen ~~W~~ Vor- und Nachteile dieses Weges zur Erarbeitung der Kongruenzsätze diskutiert werden.

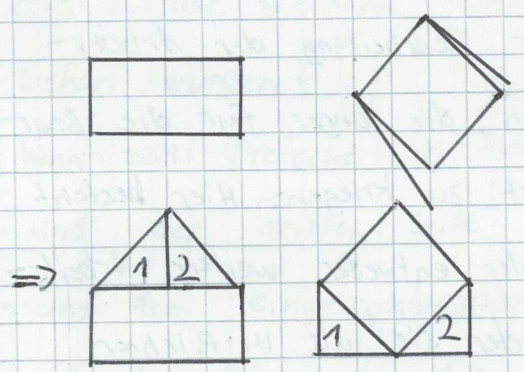
Vorteil dieses Weges wäre die intensivere Auseinander-setzung seitens der Schüler mit dem Thema. Dadurch, dass sie am Anfang herausfinden, durch welche Aufgaben ein Dreieck eindeutig bestimmt ist, wird ihnen bewusst, dass bei der Vorgabe dreier bestimmter Angaben (laut der ~~Kon~~ Kongruenzsätze) zwei Dreiecke kongruent sein müssen, weil es nur eine eindeutige Darstellung des Dreiecks gibt.
Diese Art und Weise der Themaerschließung ist jedoch mit erheblich größerem Zeitaufwand verbunden, als wenn der Lehrer die Kongruenzsätze deduktiv einführen würde. Außerdem gilt es, Schüler, die schneller mit der Bearbeitung der Arbeits-aufträge fertig sind, mit Schülern, die länger für die Bear-beitung brauchen, unter einen Hut zu kriegen. Hier besteht die Möglichkeit, schnellere Schüler entweder weitere Arbeits-aufträge bearbeiten zu lassen oder sie als Hilfslehrer einzusetzen, um schwächeren Schüler Tipps zu geben.
Ein weiterer Vorteil ist die Herausbildung der mathematischen Kompetenzen, da die Schüler hier im Einzelnen dazu angeregt werden, selbständig mathematische Zusammenhänge herzustellen und diese auch zu formulieren (z.B. mit „wenn-dann-Relationen")
Auf eine Sicherung der Ergebnisse muss geachtet werden, damit Schüler, denen etwas unklar ist, bzw. die nicht mitgekommen sind, eine Möglichkeit haben, das nochmal nachzu-vollziehen.

zu Aufgabe 1

Im Zusammenhang mit dem Begriff „kongruent", sollen noch folgene Begriffe erläutert werden:

• <u>Zerlegungsgleich:</u> Zwei Figuren heißen zerlegungsgleich, wenn sie in endlich viele, paarweise kongruente Teilfiguren zerlegt werden können

• <u>Ergänzungsgleich:</u> Zwei Figuren heißen ergänzungsgleich, wenn sie durch endlich viele, paarweise kongruenten Teilfiguren ergänzt werden können, so dass kongruente Figuren entstehen.



• <u>Flächeninhaltsgleich:</u> Zwei Figuren heißen flächeninhaltsgleich, wenn sie kongruent, zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich sind

③ Voraussetzung für diese unterrichtlichen Aktivitäten ist die Kenntnis der Achsenspiegelung.

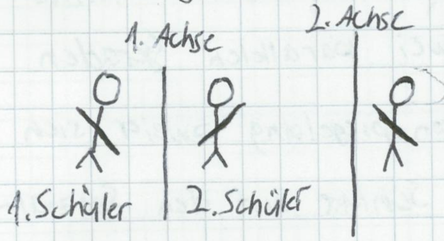
Der Lehrer sollte sicher gehen, bevor es die Verkettungen von Achsenspiegelungen durchnimmt, dass alle Schüler den gleichen Kenntnisstand bezüglich der Achsenspiegelung haben, damit alle Schüler eine möglichst gleiche Ausgangslage haben.

Des weiteren sollte der Lehrer darauf achten, dass der Schwierigkeitsgrad stetig gesteigert wird, dabei möglichst dem Lerntempo der Schüler angemessen. Das bedeutet in diesem Fall, dass er bei der Verkettung zweier Achsenspiegelungen erst die Doppelachsenspiegelung an zwei parallelen Geraden einführt, anschließend die Doppelachsenspiegelung zweier sich schneidender Geraden einführt und am Schluss auf den Spezialfall der Punktspiegelung eingeht, bei dem die zwei sich schneidenden Geraden aufeinander senkrecht stehen.

Um dieses Thema auch aufzulockern, kann man mit den Schülern am Beispiel der Parallelverschiebung die Schüler selbst spiegeln.

Dazu benennt man 3 Schüler, die sich in Größe und wenn möglich T-Shirtfarbe ähneln. Des weiteren einen Schüler, der die Doppelachsenspiegelung durchführt. Als Achsen dienen wahlweise zwei Zeigestäbe, die man auf dem Boden fixiert (senkrecht stehend)

besteht, so dass man zwischen fester Tafel und beweglicher Tafel einen 90^0-Winkel herstellt.
Der Schüler, der ganz links steht, darf nun eine selbstgewählte Pose einnehmen, die er etwa 5 Minuten innehalten kann. Der Schüler, der die Achsenspiegelung durchführt, versucht nun den Schüler an der 1. Achse zu spiegeln und stellt den 2. Schüler als Spiegelbild zu dem ersten Schüler auf. Das gleiche führt er an der 2. Achse durch, so dass die Schüler die Eigenschriften einer Achsenspiegelung bzw. einer Parallelverschiebung nochmal deutlich vor Augen geführt bekommen.



Bei der Verkettung von Achsenspiegelungen wird die Parallenverschiebung (als Doppelachsenspiegelung an ~~sich schneidenden Geraden)~~ zwei parallen Geraden) und die Drehung (als Doppelachsenspielegung an sich schneidenden Geraden) und die Punktspiegelung (als Sonderfall der Drehung und Doppelachsenspiegelung zweier sich schneidender Geraden, die aufeinander senkrecht stehen) behandelt. Im Mathe I-Zweig bedeutend ausführlicher, als im Mathe II-/III-Zweig, da in Mathe II/III-Zweig die Drehung etwa gar nicht als Doppelachsenspiegelung eingeführt wird.

Diese Art und Weise der unterrichtlichen Aktivitäten wäre sehr durch den Lehrer bestimmt bzw. unter deduktiven Lehrstil zu verstehen. Wenn man nun die Gestaltung der unterrichtlichen Aktivitäten etwas induktiver gestalten wird, besteht die Möglichkeit, mithilfe von Computerprogrammen zu arbeiten. Das erspart zum einen viel Zeit, weil die Schüler nicht zweimal eine Achsenspiegelung in ihrem Heft durchführen müssen, zum anderen können die Schüler an mehreren Beispielen leichter die Zusammenhänge bei einer Parallenverschiebung festellen. So lässt sich mithilfe des Arbeitsauftrages, dass sie einen Zusammenhang zwischen der Strecke zwischen Ur- und Bildpunkt und Abstand zwischen den zwei parallen Geraden herstellen sollen, darauf hinführen, dass der Abstand zwischen Ur- und Bildpunkt doppelt so groß wie der Abstand zwischen den zwei parallelen Spiegelachsen ist. Das gleiche gilt für die Drehung. Hier lässt sich feststellen, dass der Winkel zwischen der Halbgeraden [ZP und [ZP' doppelt so groß wie der Winkel zwischen den zwei Spiegelachsen (~~der~~ die zwei Geraden, die sich schneiden) ist. Diese Zusammenhänge lassen sich leichter mithilfe von Computerprogrammen herausstellen. Dafür müssen die Schüler allerdings mit diesen Programmen vertraut sein und es müssen genug Computer zur Verfügung stehen, damit gewährleistet ist, dass jeder Schüler diese Erfahrungen und feststellungen machen kann.

Die Drehung kann man auch einführen ohne auf die Doppelachsenspiegelung zurückzugreifen.
Eine Figur ist gegeben und das Drehzentrum, nun wird über die Figur Transparentpapier gelegt und die Figur abgemalt, anschließend wird das Drehzentrum fixiert, mithilfe einer Pinnnadel und nun können die Schüler munter drehen und dabei ein Gefühl für die Drehung bekommen. In diesem Zusammenhang kann auch auf die Achsen- und Punktsymmetrie eingegangen werden und damit auf achsen- und punktsymmetrische Figuren.