

Aufgabe 1Definition Kongruenzabbildung

Eine geometrische Abbildung nennt man Kongruenzabbildung, wenn sie eine Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung oder Schubspiegelung ist.

Kongruenzabbildungen sind:

- geradentreu (Eine Gerade wird auf eine Gerade abgebildet)
- längentreu (Die Längen sind gleich lang)
- winkeltreu (Die Winkel sind gleich groß)

b.w.

Diese Definition gibt vor, dass man eben eine Kongruenzabbildung mit einer Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung oder einer Schubspiegelung bekommen kann.

→ Achsen Spiegelung

Eine Achsenspiegelung ist eine geometrische Abbildung nach folgender Konstruktionsvorschrift.

1. Gegeben sei eine Gerade a und ein Ursprung P

2. Konstruktionsvorschrift

* 1. Fall: $P \notin a$

(2.1 Zeichne ein Lot L durch den Punkt P auf a

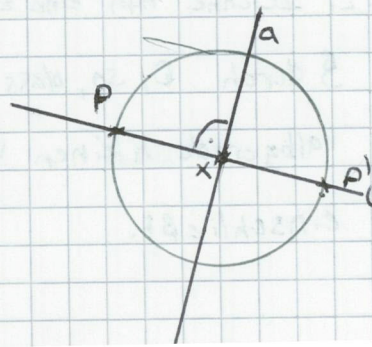
2.2. Der Schnittpunkt von L mit a ist x

2.3. Zeichne einen Kreis $k = (x, \overline{xP})$

2.4. Zweiter Schnittpunkt von k mit L ist P'

2.5. P' ist Bildpunkt von P

* 2. Fall: $P \in a$



→ Punktspiegelung

Eine Punktspiegelung ist eine geometrische Abbildung nach folgender Konstruktionsvorschrift.

1. Gegeben sei ein Punkt Z (Zentrum) und ein Ursprung P

1. Fall: $Z \neq P$

2. Konstruktionsvorschrift

2.1. Zeichne eine Halbgerade h durch

den Punkt Z und P mit Anfangspunkt P

2.2. Zeichne einen Kreis $k = (Z, \overline{ZP})$

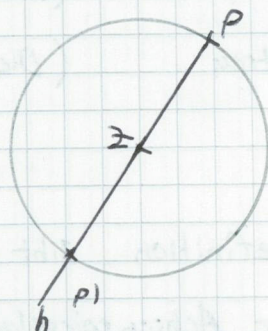
2.3. Schnittpunkt mit Kreis K und h ist P'

2.4 P' ist Bildpunkt von P

2. Fall: $Z = P$

2. Konstruktionsvorschrift

2.1. $P' = P = Z$



- Drehung

Eine Drehung ist eine geometrische Abbildung nach folgender Konstruktionsvorschrift. 1. Gegeben sei ein Punkt O (Drehzentrum)

ein Winkel α (Drehwinkel) und ein Ursprung P

1. Fall: $P \neq O$ und $\alpha \neq 0$

2. Konstruktionsvorschrift

2.1. Zeichne eine Halbgerade h durch P und O

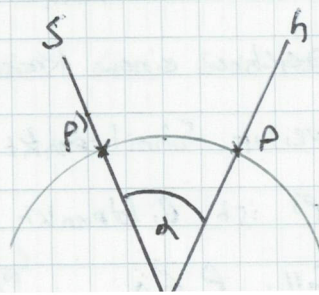
mit Anfangspunkt O

2.2. Zeichne nun eine zweite Halbgerade

s durch O , so, dass sie mit

Halbgerade h einen Winkel α

einschließt.



2.5 P' ist Bildpunkt von P

2. Fall: $P = D$ und $\rightarrow \alpha = 0$

2. Konstruktionsvorschrift

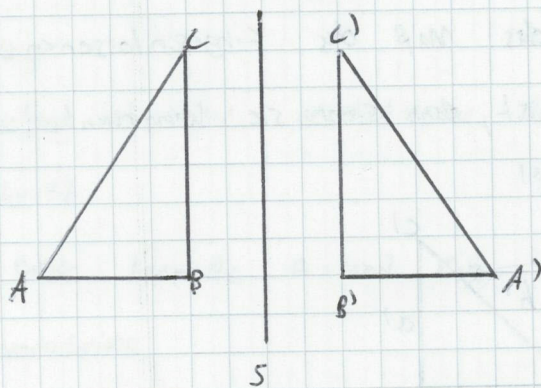
2.1. $P = D = P'$

Mit diesen Konstruktionsvorschriften kann man eine Kongruenzabbildung im allgemeinen bestimmen.

Bei den zwei kongruenten Dreiecken, werden immer die Eckpunkte des Dreiecks ABC mit einer Kongruenzabbildung (Achsen spieg elung, Punktspiegelung, Drehung, Schubspiegelung) abgebildet zu $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$ und $C \rightarrow C'$. Erst wenn alle 3 Punkte abgebildet sind, werden sie mit einander verbunden. Erst dann entsteht das Dreieck.

Bei einer Kongruenzabbildung können nur Punkte abgebildet werden und keine Figuren.

Skizze für eine Achsen spieg elung von einem Dreieck:



S = Spiegelachse

b.w.

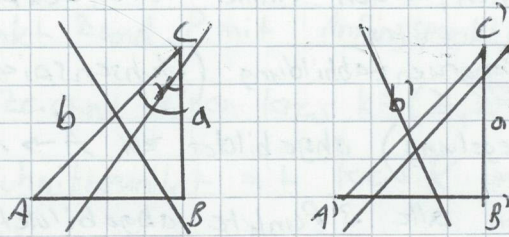
Aufgabe 2

Kongruenzsätze für Dreiecke werden erst in der 8. Jahrgangsstufe behandelt. Zunächst werden die 4 Kongruenzsätze erst einmal vorgestellt.

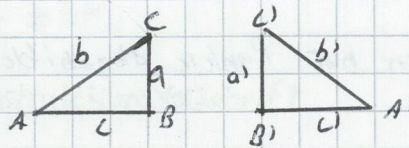
1. Kongruenzsatz (SSS)

Wenn zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ in allen Seitenlängen übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

$$a = a', \quad b = b', \quad \cancel{c = c'}, \quad c = c'$$



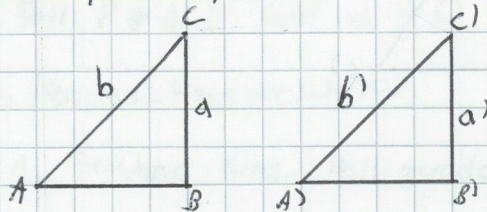
B



2. Kongruenzsatz (SWS)

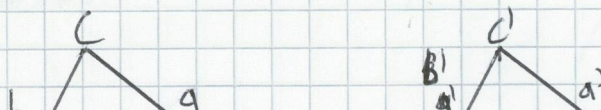
Wenn zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ in den zwei Seitenlängen übereinstimmen und das Maß des eingeschlossenen Winkels dann diesen Längen gleich ist, dann sind sie kongruent.

$$a = a', \quad b = b', \quad \gamma = \gamma'$$



3. Kongruenzsatz (WSW)

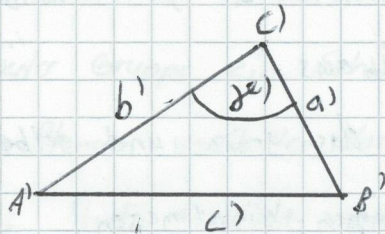
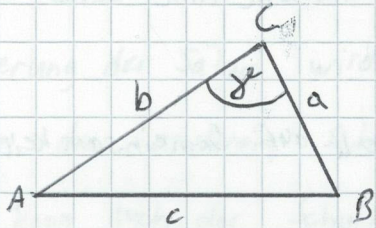
Wenn zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ eine gleiche Seitenlänge besitzen und das Maß der anliegenden Winkel dieser Seite gleich groß ist, dann sind sie kongruent.



4. Kongruenzsatz (SSW)

Wenn zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ in zwei Seitenlängen übereinstimmen und das Maß des gegenüberliegenden Winkels der längeren Seite gleich groß ist, dann sind sie kongruent.

mit $a < c$ $a = a'$, $c = c'$, $\gamma = \gamma'$



Vorwissen von Schülern:

- Die Schüler können eine Skizze anfertigen für ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$
- Die Schüler können den Begriff kongruent erklären
- Die Schüler können Beispiele für eine Kongruenzabbildung nennen.

b.w.

Idee zur Erarbeitung der genannten Kongruenzsätze für Dreiecke im

Mathematikunterricht:

→ Unterrichtseinstieg

- Der Lehrer bringt zwei kongruente Dreiecke mit, Ein grünes und ein gelbes.

L: „Was fällt euch auf?“ S: „Die beiden Dreiecke sind gleich“

- Nun teilt der Lehrer jedem Tisch zwei kongruente Dreiecke (sind kleiner als die ersten beiden) grün und gelb aus.

Arbeitsauftrag: Untersuche das grüne und gelbe Dreieck auf Gemeinsamkeiten (evtl. Seitenlängen, Winkel messen)

Nachdem die Schüler die Dreiecke verglichen haben, werden die Ergebnisse im Plenum zusammengetragen. (Lösung: Seitenlängen, gleich groß ^{und} Winkel gleich)

- Wiederholung des Begriffs kongruent (geraden treu, längen treu, Winkelmaß treu)

→ Erarbeitung (ikonisch, symbolisch)

Der Lehrer teilt nun die Klasse in 4 bzw. 8 Gruppen auf.

Jeder dieser Gruppen bekommt einen Kongruenzsatz (nur Text, siehe oben)

Arbeitsauftrag: Lese dir den Text durch und übertrage diesen in dein Heft.

Fertige eine Skizze dazu an

(Text: siehe oben)

Während die Schüler in Gruppen den Arbeitsauftrag bearbeiten, geht der Lehrer durch die Klasse und geht nach, ob die Skizzen stimmen.

Anschließend werden neue Gruppen gebildet in der die Schüler versch.

Kongruenzsätze bearbeitet haben. Ein Schüler ist nun der „Experte“ für seinem Kongruenzsatz und erklärt diesen seinen Mitschülern in der Gruppe. Sie schreiben die neuen Sätze mit Skizze in ihr Heft (→ Expertenrunde)

Zur Sicherung der Sätze wird aus jeder Gruppe ein Schüler bestimmt der den Satz dann den anderen Schülern im Plenum vorstellen darf (mit Hilfe von Folien)

Danach kann auch das Schulbuch als Hilfe genutzt werden, damit die Schüler selber überprüfen können, ob sie alles richtig gemacht haben

→ Übung

Nun wird mit den Schülern gemeinsam geübt. Der Lehrer bringt ganz viele bunte Dreiecke mit ^{und} die Schüler sagen, dann ob sie kongruent sind.

Auch mit gegebenen Zahlenwerten (z.B. $a=5\text{cm}$, $b=3\text{cm}$, $\beta=30^\circ$ und $a'=2,5$; $b'=1,5$; $\gamma=60^\circ$ → sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ kongruent? (nein) und mit den Schülern gearbeitet.

Mit diesem Weg werden die mathematischen Kompetenzen gefördert. Die Schüler lernen in der Expertenrunde mathematisch zu argumentieren und Texte mathematisch zu erklären. Ebenso wird die Kommunikation der Schüler in der Gruppenarbeit gefördert und gefordert. Die Schüler lernen auch den Transfer Texte in Zeichnungen darzustellen. Der Umgang mit Lineal, Bleistift wird gefördert, indem Skizzen verlangt werden. Auch eine ordentliche Beschriftung der Skizzen wird geübt und vertieft.

Jedoch ist bei dieser Art von Erarbeitung die aktive Seite nicht ganz so stark. Durch das Vergleichen der Dreiecke ist die Aktivität durch den Schülern nur bedingt möglich.

Ebenso ist die Sicherung von den Kongruenzsätzen etwas schwierig. Der Lehrer sollte immer darauf achten, dass in den Gruppen richtig gearbeitet wird.

Insgesamt kann man aber festhalten dass dieser Weg die Kompetenzen im Fachbereich Mathematik fördert und fordert.

Die angedachte Idee sollte in einer Doppelstunde durchgeführt werden.

Um die Sicherung der Sätze zu gewährleisten kann man auch in der 1. Gruppe ein Plakat erstellen lassen, dass im Klassenzimmer aufgehängt wird und die Schüler ihren Mitschülern vorstellen.

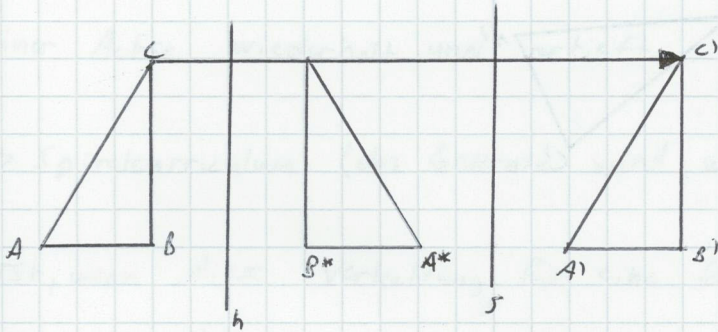
Aufgabe 3

Verkettung von Achsenspiegelungen:

→ Parallelverschiebung

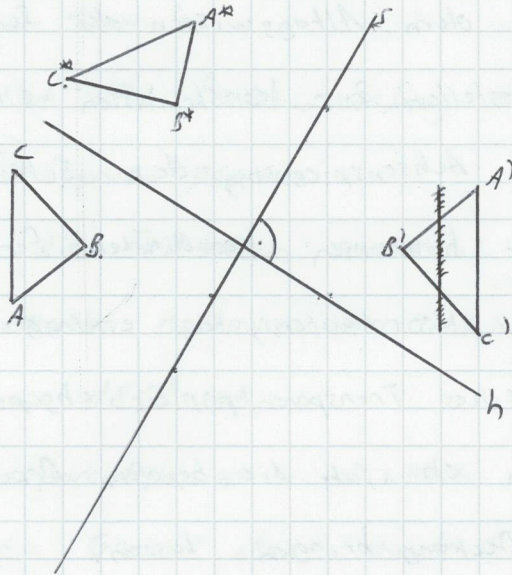
Eine Parallelverschiebung ist eine Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei parallelen Achsen.

Skizze:



→ Punktspiegelung

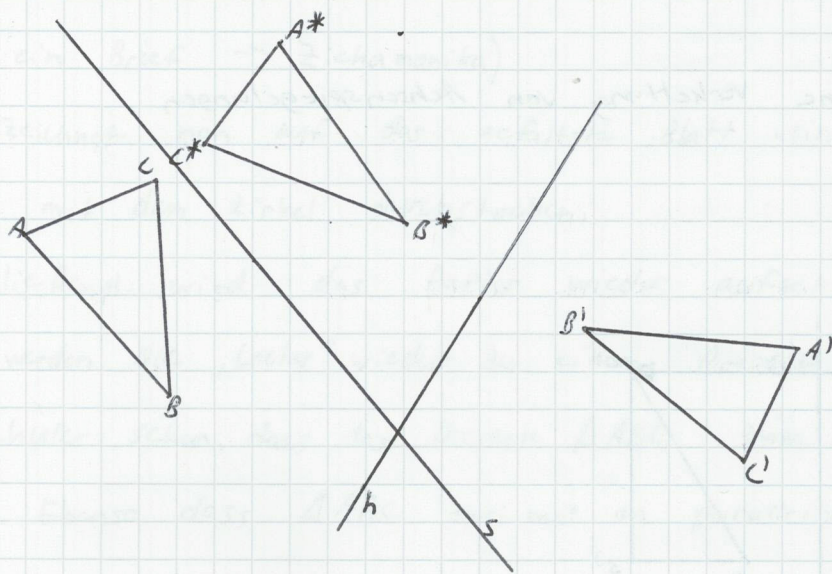
Eine Punktspiegelung ist eine Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei sich senkrecht schneidenden Achsen.



(→ auch ein Spezialfall der Drehung mit $\alpha = 180^\circ$)

→ Drehung

Eine Drehung ist eine Verkettung von Achsenspiegelungen an zwei sich schneidenden Geraden.



Die Achsenspiegelung wird zum ersten Mal in der 6. Klasse behandelt.

Dort wird der Begriff der Achsenspiegelung mit den Schülern erarbeitet und die Schüler können mit ihrem Geodreieck Figuren an einer Spiegelachse spiegeln. Jedoch wird hier nur an einer Achse gespiegelt. Die Themen Punktspiegelung, Drehung und Parallelverschiebung werden in der 7. Klasse eingeführt.

Zuerst der Begriff der Drehung. Aus dem Alltagswissen der Schüler ist können sich diese eine Drehung gut vorstellen. Zur Konstruktion einer Drehung ~~erleichtert~~ erleichtert der Rückbeleg auf eine Achsenspiegelung den Schülern der Kernstruktur einer Drehung. Die Schüler bekommen Koordinaten für zwei kongruente Dreiecke, diese sollen sie in ein Koordinatensystem eintragen. Anschließend werden die Dreiecke mit Hilfe eines Transparentpapiers abgepaust.

Nun sollen die Schüler versuchen ob sich die beiden Dreiecke auf dem Transparentpapier irgendwie zur Deckung bringen lassen.

(Tip: sie können die Ecken auch mit den Zirkelspitzen durch stechen).

Dabei ~~stehen~~ sehen Sie dass man das Papier zweimal falten muss, damit die zwei Dreiecke sich in Deckung bringen lassen.

→ Die Faltkanten sind die Spiegelachsen.

Die Schüler sehen, dass die Faltkanten sich schneiden.

Nun sollen sie diese Kanten von Transparentpapier in ihr Heft übernehmen.

→ und $A \# B \# C$ (siehe oben) ergänzen.

Durch diese enaktive Form sehen die Schüler, dass eine Drehung eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen ist.

Dabei werden die benötigten Fertigkeiten der Schüler für eine Spiegelung an einer Achse wiederholt und vertieft.

→ Spiralcurriculum (das Gelernte wird wiederholt und erweitert.)

Erst, wenn diese Verkettung für eine Drehung mit den Schülern geübt ist, kann man die Variante mit Drehzentrum und Drehwinkel einführen und üben.

Die Punktspiegelung wird dann meist als Spezialfall der Drehung ($\alpha = 180^\circ$) eingeführt und geübt. Jedoch lässt sich auch hier die Punktspiegelung als Verkettung von Achsenspiegelungen mit einfließen.

Man kann die Schüler fragen, ob sich bei einer Figur (Spielkarten) Symmetrieachsen einzeichnen lassen?

Oder man erarbeitet die Punktspiegelung wieder in der Art, wie die Drehung mit Transparentpapier.

Nur dass hier die Faltachsen senkrecht stehen.

Diese Methode macht noch einmal sichtbar, dass die Punktspiegelung eine Drehung um 180° ist.

Mit dem Transparentpapier wird auch die Feinmotorik von Schülern gefördert und die Geduld, ebenso auch die Kreativität im Falten.

Die Parallelverschiebung kann ebenso aktiv bearbeitet werden.

Man faltet ein Papier zweimal. Man drittelt zunächst das Blatt-Papier und dreht es um und faltet es auf der anderen Seite noch einmal (wie ein Brief $\rightarrow$ Zichamonika)

Nun zeichnet man auf das gefaltete Blatt ein Dreieck ABC die Ecken werden mit dem Zirkel durchgestochen.

Anschließend wird das Papier wieder aufgeklappt.

Nun werden die „Löcher“ wieder zu einem Dreieck verbunden.

Die Schüler sehen, dass das Dreieck $\triangle ABC$ zum $\triangle A'B'C'$ verschoben wurde. Ebenso dass $\triangle ABC$ zwei mal an parallelen Achsen (=Faltkanten) gespiegelt wurde.

Diese „Faltmethoden“ sind auch eine gute Idee um lernschwache Schüler zu fördern. ~~Brad~~ Durch die manuelle Tätigkeit kann auch ein Schüler eine Drehung durchführen, ohne Bleistift und Geodreieck.

Hier ist nur die Geschicklichkeit gefragt und der Schüler sieht durch das Falten sehr schnell ein Ergebnis.