Aufgabe 1:

Erläutern Sie den Begriff „quadratische Funktion"!

Eine quadratische Funktion ist eine Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\quad x \to ax^2+bx+c$ mit reellen zahlen $a \neq 0$, $b$ und $c$ den Parametern. Der Graph einer quadratischen Funktion ist die Parabel.

Der Parameter $a$ gibt dabei die Öffnung der Parabel an:

- Für $a>0$ ist die Parabel nach oben geöffnet.
- Für $a<0$ ist die Parabel nach unten geöffnet
- Für $|a|>1$ ist die Parabel gestreckt.
- Für $|a|<1$ ist die Parabel gestaucht.

Der Parameter $c$ verschiebt die Parabel in y-Richtung. Der Parameter $b$ verschiebt die Parabel sowohl in x, als auch in y-Richtung.

Die allgemeine quadratische Funktion lässt sich in die Scheitelpunktsform überführen, mittels:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)
\end{aligned}
$$

Durch die Überführung der allgemeinen quadratischen Funktionsgleichung in die Scheitelpunktsform mit Hilfe der quadratischen Ergänzung sind die Koordinaten des Scheitels leicht abzulesen $S\left(-\frac{b}{2a} \middle| c-\frac{b^2}{4a}\right)$

Weitere Eigenschaften der quadratischen Funktion sind:

→ Quadratische Funktionen haben eine Extremstelle (ihren Scheitel)

→ Der höchste Exponent einer quadratischen Funktion ist die 2

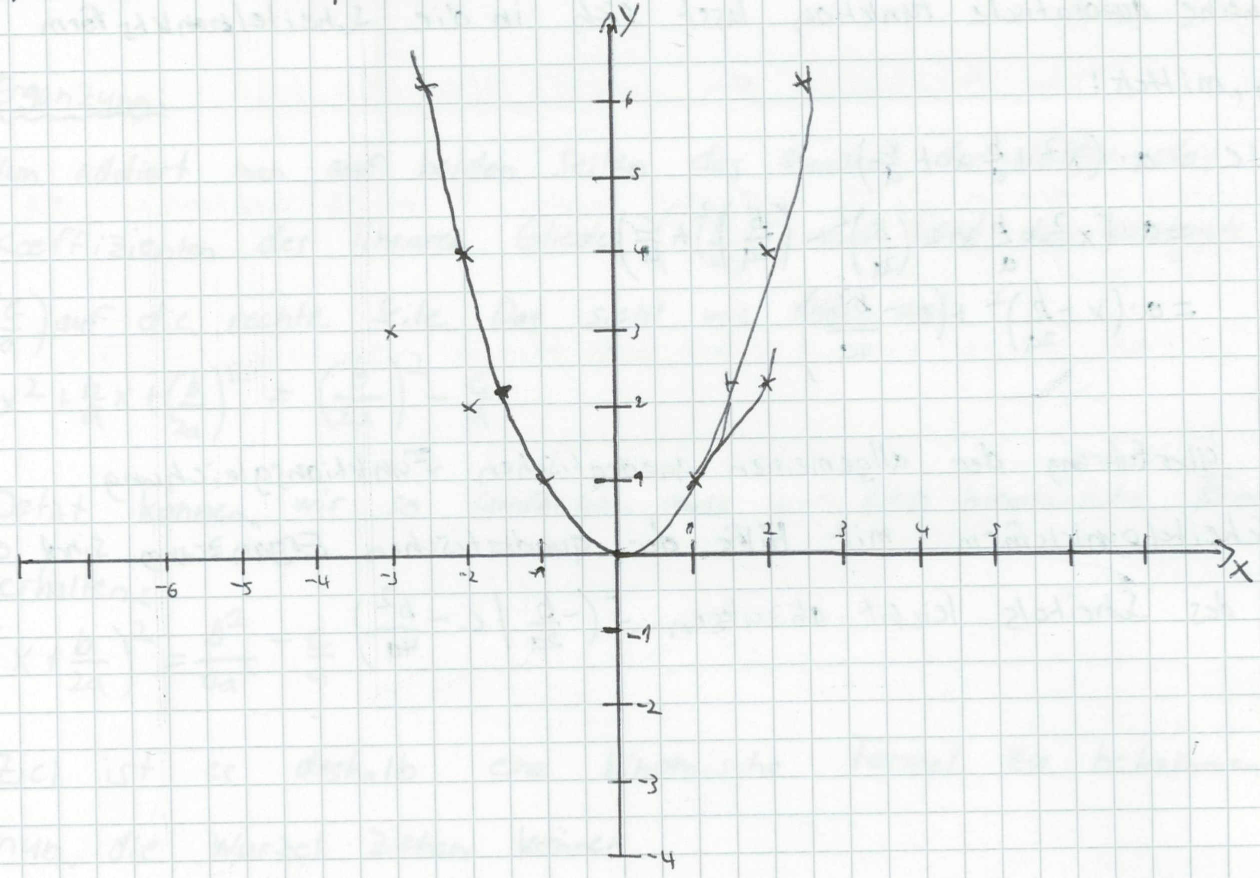
→ Quadratische Funktionen besitzen somit maximal zwei Nullstellen.

→ Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel (siehe den Graphen auf S. 3 der Normalparabel)

→ Für die Normalparabel $y = x^2$ beträgt der Scheitel (0|0), liegt also im Nullpunkt.
Die Symmetrieachse der Normalparabel ist die y-Achse.

→ Quadratische Funktionen sind symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch ihren Scheitel.

Graph der Normalparabel:



Aufgabe 2)

Beschreiben Sie verschiedene Möglichkeiten zur Lösung quadratischer Gleichungen! Gehen Sie dabei auch auf ein Näherungsverfahren ein!

• Lösung quadratischer Gleichungen ohne konstantes Glied (d.h. $c=0$)

Bei fehlendem konstanten Glied wird die linke Seite des Terms durch Ausklammern von $x$ faktorisiert: $ax^2+bx=0$

$$x\cdot(ax+b)=0$$

Das oben stehende Produkt wird genau dann gleich 0, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich 0 wird.

~~Aus~~ Die erste Lösung ist somit $x_1=0$.

Die zweite Lösung erhält man, indem man $ax+b=0$ setzt.

Somit ist $x_2=\frac{-b}{a}$

• Lösung quadratischer Gleichungen ohne lineares Glied (d.h. $b=0$)

Bei fehlendem linearen Glied wird auf beiden Seiten $c$ subtrahiert, d.h. aus $x^2+c=0$ wird $x^2=-c$.

Durch Radizieren (Wurzel ziehen) erhält man folgende Lösung: $x_{1/2}=\pm\sqrt{-c}$

Diese Gleichung ist nur dann definiert, wenn $c$ negativ ist, da die Wurzel aus $-c$ nicht definiert ist.

· Lösung allgemeiner quadratischer Funktionsgleichungen $ax^2+bx+c=0$

Das Lösungsverfahren für allgemeine quadratische Funktionsgleichungen ist die quadratische Ergänzung.
Diese besteht aus 3 Schritten:

① Normierung:

Beide Seiten des Terms werden durch a dividiert.

Nun erhält man: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

Ziel ist es, den Koeffizienten des quadratischen Gliedes zu normieren, d.h. zu 1 zu machen.

② Ergänzung:

Nun addiert man auf beiden Seiten das Quadrat der Hälfte des Koeffizienten des linearen Gliedes $\left(+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$ und zieht das konstante Glied $\left(\frac{c}{a}\right)$ auf die rechte Seite. Das sieht wie folgt aus:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Jetzt können wir so umformen, dass wir eine binomische Formel erhalten:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

Ziel ist es deshalb eine binomische Formel zu bekommen, da wir nun die Wurzel ziehen können.

3 Radizieren

Aus der soeben gewonnenen binomischen Formel kann nun die Wurzel gezogen werden, dann erhalten wir:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Nun wird nach x aufgelöst:

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

Durch geschicktes Umformen und Vereinfachung erhalten wir nun die Mitternachtsformel, die zum lösen quadratischer Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$ verwendet wird:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Quadratische Gleichungen haben allerdings nicht immer zwei Lösungen. Betrachtet man den Radikanten, die sogenannte Diskriminante $D = b^2-4ac$ in der Mitternachtsformel, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

- $D < 0$: Es gibt keine Lösung
- $D = 0$: Es gibt genau eine Lösung
- $D > 0$: Es gibt zwei verschiedene Lösungen

- Graphisches Lösen:

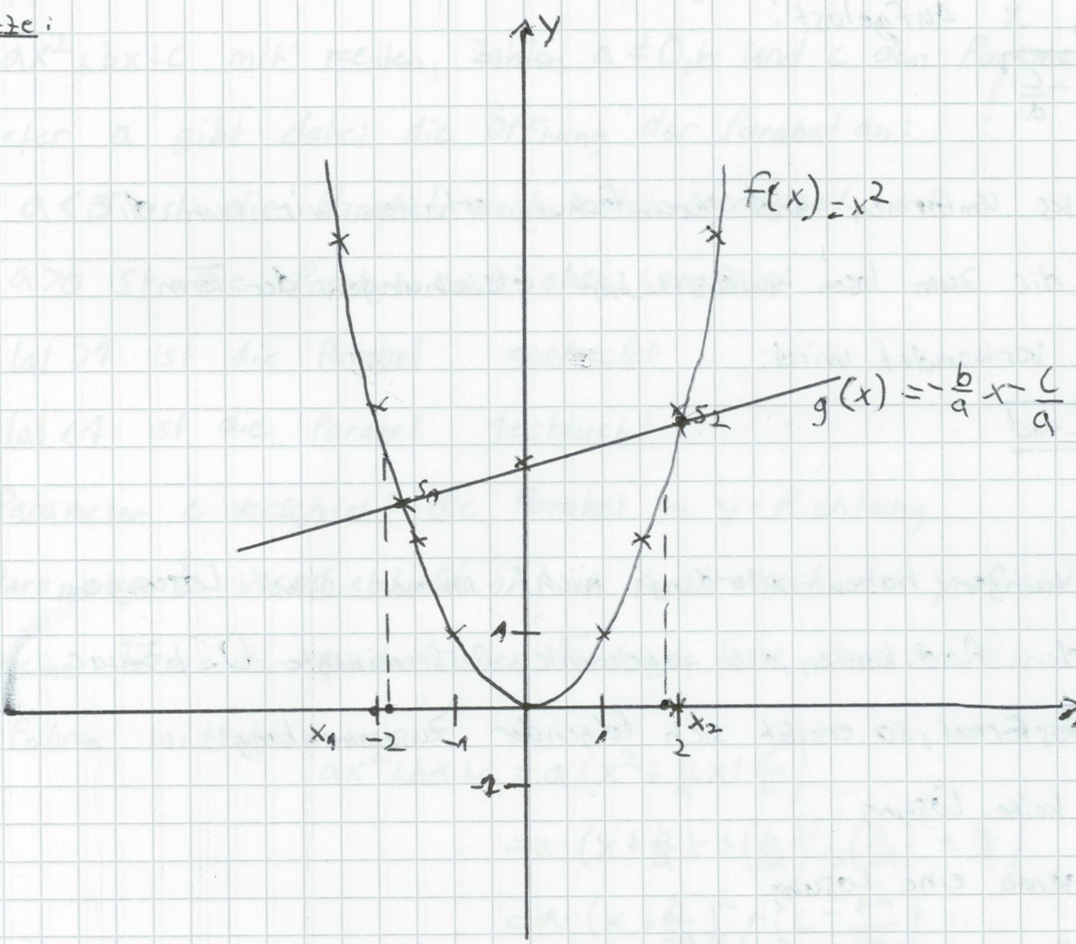
Beim Graphischen Lösen wird die quadratische Funktion zur Hilfe für die Bestimmung der x-Werte in zwei Teilfunktionen zerlegt.

Aus $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ werden nun die Teilfunktionen

$f(x)=x^2$ und $g(x)=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$.

Diese lassen sich leicht zeichnerisch darstellen (siehe bitte unten stehende Skizze) da es sich bei $f(x)$ um die Normalparabel und bei $g(x)$ um eine Gerade mit der Steigung $-\frac{b}{a}$ und dem y-Achsenabschnitt $-\frac{c}{a}$ handelt.

Skizze:




Die Schnittpunkte $S_1 S_2$ der beiden Teilfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ bzw. deren x-Werte (die x-Werte der Schnittpunkte) sind nun die Lösungen der quadratischen Funktionsgleichungen, $x_1, x_2$, die grafisch ganz einfach ermittelt würden.

Satz von Vieta:

Beim Satz von Vieta wird die Form $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ durch die Koeffizienten $p:=\frac{b}{a}$ und $q:=\frac{c}{a}$ umgewandelt

Nun erhält man $x^2+px+q$

$p$ ist nun $-(x_1-x_2)$

und $q = x_1 x_2$

Dieser Satz ist vor allem bei der Lösungskontrolle sehr hilfreich.

Aufgabe 3:

In einer Unterrichtsstunde soll die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion erarbeitet werden. Beschreiben Sie den Verlauf des Unterrichts! Begründen Sie dabei wesentlich Schritte unter didaktischen Gesichtspunkten!

1. Sachanalyse

Eine quadratische Funktion ist eine Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to ax^2 + bx + c$ mit reellen Zahlen $a \neq 0$, b und c den Parametern. Der Parameter a gibt dabei die Öffnung der Parabel an:

- Für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet
- Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet
- Für $|a| > 1$ ist die Parabel gestreckt
- Für $|a| < 1$ ist die Parabel gestaucht

Der Parameter c verschiebt die Parabel in y-Richtung.
Der Parameter b verschiebt sowohl in x, als auch in y-Richtung. Die allgemeine Form der quadratischen Funktion lässt sich in die Scheitelpunktform überführen, mittels:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Scheitels $S\left(-\frac{b}{2a} \,/\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ sind davon leicht abzulesen.

## 2. Lernvoraussetzungen

Die quadratische Funktion und die Umformung der allgemeinen Form in die Scheitelpunktform wird an der ~~allgemeinen~~ Realschule in der 9. Jahrgangsstufe behandelt. Den Schülern sollte für die Unterrichtsstunde bekannt sein:

→ Die Schüler kennen die allgemeine quadratische Funktionsgleichung $y = x^2 + px + q$

→ Die Schüler kennen den Graph einer quadratischen Funktions~~gleichung~~, die Parabel.

→ Die Schüler sind vertraut mit den Eigenschaften des Graphen wie Streckung, Öffnung, Scheitel.

→ Die Schüler kennen die Scheitelpunktform $a(x-d)^2+e$ und wissen, wie sich an ihr horizontale und vertikale Verschiebungen durchführen lassen.

→ Die Schüler wissen, dass an der Scheitelpunktform der Scheitel der Parabel abgelesen werden kann.

→ Den Schülern ist bekannt, dass für die allgemeine Form eine Wertetabelle benötigt wird.

→ Die Schüler sind vertraut mit Termumformungen, Gleichungen und den binomischen Formeln.

## 3. Lernziele:

Grobziel: Die Schüler sind in der Lage, die allgemeine Form einer quadratischen Funktion in die Scheitelpunktform zu überführen.

Feinziele: → Den Schülern ist der Zusammenhang zwischen der allgemeinen quadratischen Funktionsgleichung und deren Scheitelpunktform bewusst.

→ Die Schüler erkennen die praktische Bedeutung der Umformung in die Scheitelpunktform

→ Die Schüler wissen, dass sich jede allgemeine Parabel in die Scheitelpunktform überführen lässt

→ Die Schüler erwerben erste Fähigkeiten für die Umformung der allgemeinen quadratischen Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

## 4. Methodische Vorbemerkungen

Die Schüler werden vom Lehrer zu Stundenbeginn durch Partnerarbeit aktiviert. Eigenes Erfahren soll die Schüler dazu motivieren, später selbstständig eine allgemeine quadratische Funktion in ihre Scheitelpunktform umformen zu können. Hier können die Schüler ihr Vorwissen über Wertetabellen, Graphen und Funktionen einbringen und sich auch gegenseitig über eventuelle Schwierigkeiten hinweghelfen. Bei der Umformung übernimmt der Lehrer wieder aktiver den Unterricht, um eine Sicherung der herausgearbeiteten Lösung durch die Schüler zu gewährleisten. Dabei achtet der Lehrer auch darauf, dass sich alle Schüler im Unterricht gleich einbringen. Eine Abschließende Partnerarbeit dient der Lernzielkontrolle.

## 5. Einstieg in die Problemstellung / Problemstellung:

Die Klasse wird in zwei Gruppen geteilt, von denen jeweils in Partnerarbeit gearbeitet wird. Beide Gruppen erhalten vom Lehrer auf einem Arbeitsblatt eine quadratische Funktion, zu der sie Wertetabelle und Graphen erstellen sollen. Allerdings erhält Gruppe 1 die quadratische Funktion allgemeiner Form während Gruppe 2 die selbe Funktion in Scheitelpunktform erhält.
Nach der Partnerarbeit stellen zwei Kleingruppen (eine aus Gruppe 1, eine aus Gruppe 2) ihre Ergebnisse der Klasse am Overheadprojektor vor.
Die Schüler erkennen nun, dass es sich sowohl um gleiche Werte in der Wertetabelle, als auch um den gleichen Graphen handelt. Bei ihnen kommt die Vermutung auf, dass beide Gleichungen, die von Gruppe 1 und die von Gruppe 2, die selbe Funktion beschreiben und sie stellen sich (und möglicherweise auch dem Lehrer) die Frage, ob man die eine Form in die andere überführen kann.
Der Lehrer betonnt die Festellung, dass man die allgemeine Form einer quadratischen Form in die Scheitelpunktform überführen kann. Er fragt die Schüler, welche Form denn eine Erstellung des Graphen erleichtern würde und erhält daraufhin von den Schülern die Antwort (Vermutung!): „Die Scheitelpunktform, da von ihr der Scheitel direkt abgelesen werden kann. Es wird außerdem betont, dass es sich bei dem Scheitel um den Extremwert d.h. den höchsten oder tiefsten Punkt handelt, den der Graph besitzt. Nun soll nach diesem Einstieg mit den Lehrenden ein Verfahren gefunden werden, das die allgemeine Form in die Scheitelpunktform über führt.

## 6. Problemlösung / Sicherung

Bevor die allgemeine quadratische Funktionsgleichung überführt werden kann, muss das Prinzip an einfachen quadratischen Funktionen, z.B. $x^2-6x+9$, welche unmittelbar mit Hilfe der binomischen Formel umgeformt werden können, verdeutlicht werden (Bsp. wird zu $(x-3)^2$). Die Schüler erkennen mit dem Lehrer an der Tafel, das auch im allgemeinen Fall die binomische Formel entscheidend für die Umformung ist. Dies erfahren sie über den umgekehrten Weg, d.h. der Überführung von z.B. $(x-3)^2+4$ in die Form $x^2-6x+13$. Hierfür addieren sie eine „schlaue 0" in diesem Fall $+9, -9$ und können ihr Ergebnis zu einer binomischen Formel zusammenfassen. Die Schüler haben nun gemeinsam mit dem Lehrer das Verfahren der quadratischen Ergänzung entdeckt. Die Herleitung übernehmen sie von der Tafel in ihr Heft. In dieser Phase wäre es allerdings zu früh, den Ausdruck „addiere $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ und subtrahiere den selben Ausdruck wieder" einzuführen.

## 7. Vertiefung

Um den Nutzen der Umformung der allgemeinen Form der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktform zu verdeutlichen, erhalten die Schüler vom Lehrer ein Arbeitsblatt, welches sie wiederum in Partnerarbeit lösen können und im Anschluss gesamt besprochen wird.

Das Arbeitsblatt könnte so aussehen! Lösung auf S.16

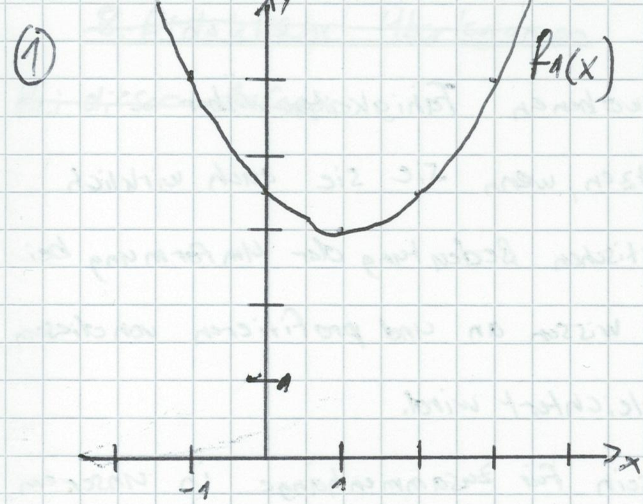
Name: Klasse: Datum:

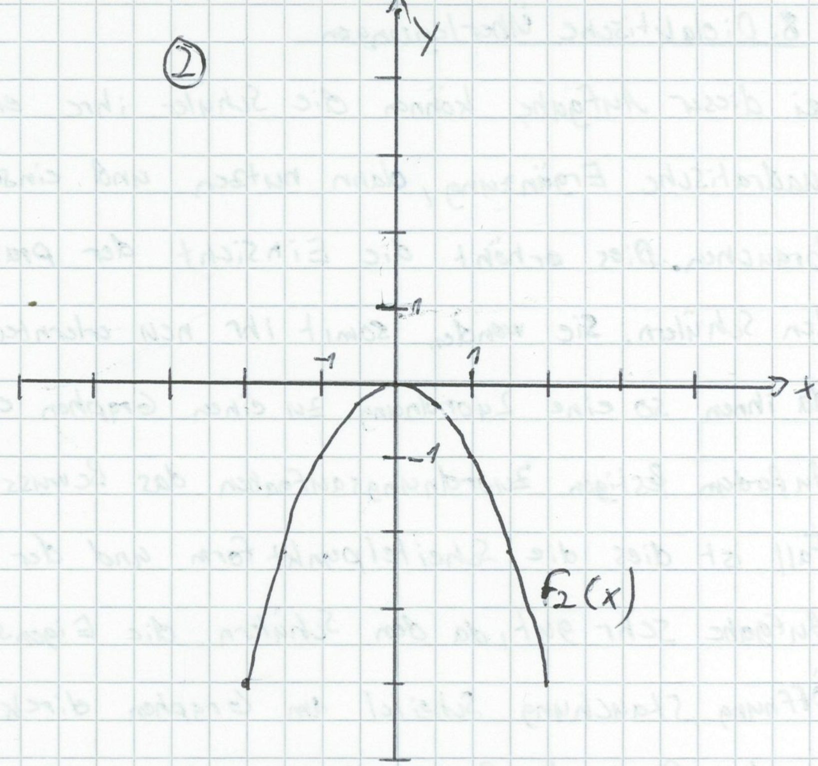
| Quadratische Funktionen und ihre Scheitelpunktform |
|---|

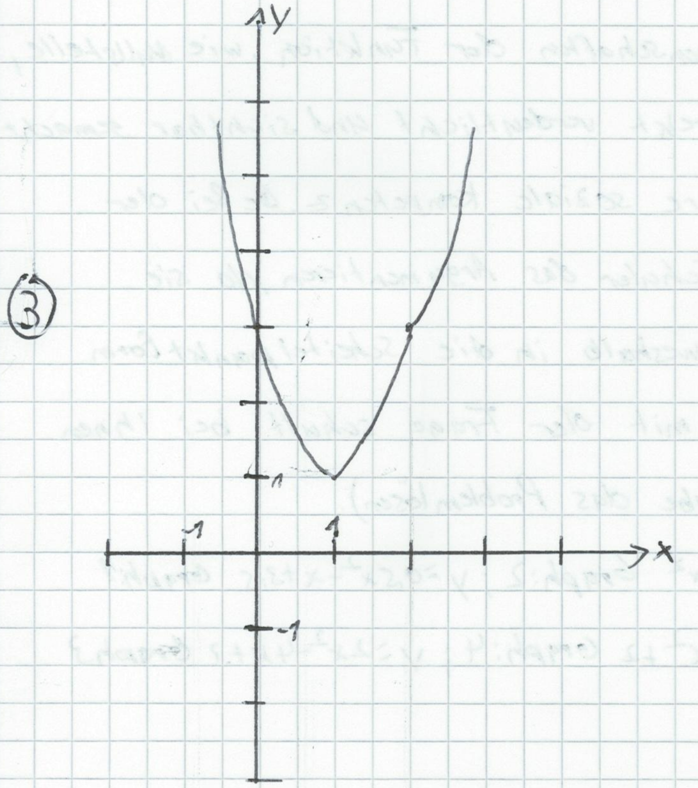
Aufgabe: Ordne jeder Funktion den passenden Graphen zu.

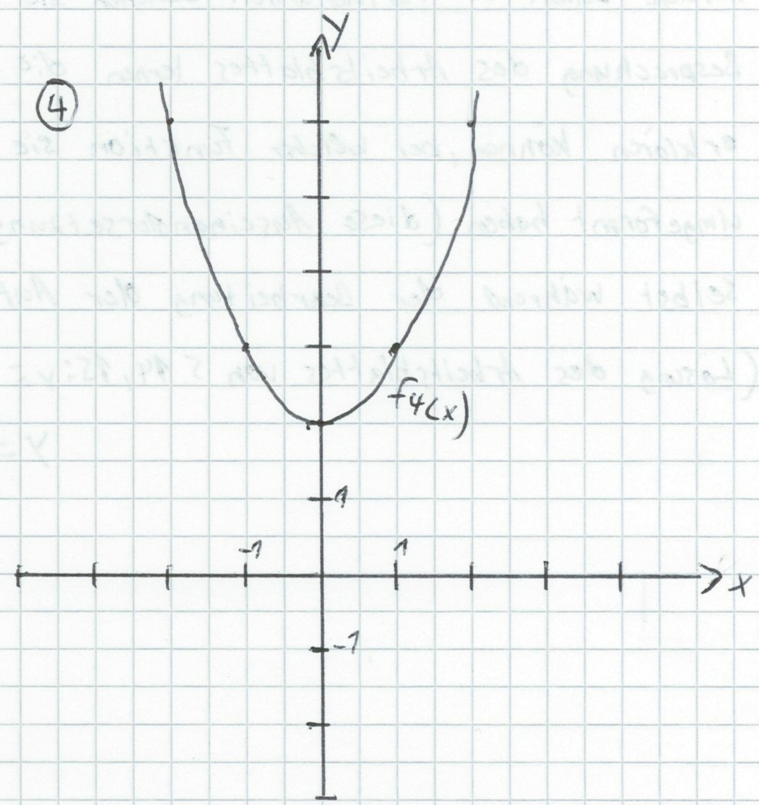
Forme wenn nötig in die Scheitelpunktform um.

Verwende hierfür dein Schulheft.




| Funktionen: | Graph Nr.: | Funktionen: | Graph Nr.: |
|---|---|---|---|
| $y = -x^2$ | | $y = x^2 + 2$ | |
| $y = 0{,}5x^2 - x + 3{,}5$ | | $y = 2x^2 - 4x + 3$ | |

## 8. Didaktische Überlegungen

Bei dieser Aufgabe können die Schüler ihre erworbenen Fähigkeiten über quadratische Ergänzung, dann nutzen und einsetzen, wenn sie sie auch wirklich brauchen. Dies erhöht die Einsicht der praktischen Bedeutung der Umformung bei den Schülern. Sie wenden somit ihr neu erlerntes Wissen an und profitieren von diesem, da ihnen so eine Zuordnung zu einen Graphen erleichtert wird.

Außerdem festigen Zuordnungsaufgaben das Bewusstsein für Zusammenhänge in unserem Fall ist dies die Scheitelpunktform und der Ort des Scheitels. Zudem ist diese Aufgabe sehr gut, da den Schülern die Eigenschaften der Funktion, wie Nullstelle, Öffnung, Stauchung Scheitel am Graphen direkt verdeutlicht und sichtbar gemacht werden. Durch die Partnerarbeit schulen sie ihre soziale Kompetenz. ~~De~~ Bei der Besprechung des Arbeitsblattes lernen die Schüler das Argumentieren, da sie erklären können, bei welcher Funktion sie weshalb in die Scheitelpunktform umgeformt haben (diese Auseinandersetzung mit der Frage schult bei ihnen selbst während der Bearbeitung der Aufgabe das Problemlösen).

(Lösung des Arbeitsblattes von S. 14, 15: $y = -x^2$ Graph: 2; $y = 0{,}5x^2 - x + 3{,}5$ Graph: 1

$y = x^2 + 2$ Graph: 4; $y = 2x^2 - 4x + 3$ Graph 3)