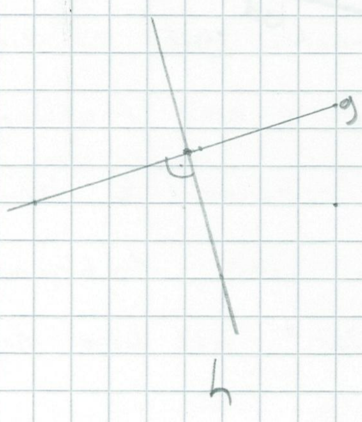
Thema Nr. 1

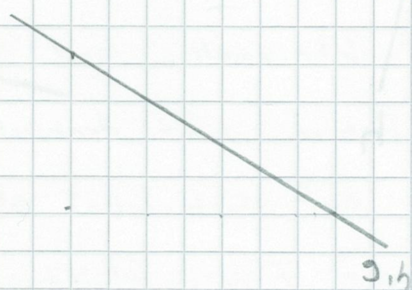
1) Erläutern Sie den Begriff „symmetrische Figur" im Bereich der ebenen Geometrie! Unterscheiden Sie dabei verschiedene Symmetriearten!

Bei einer symmetrischen Figur in der ebenen Geometrie handelt es sich um eine geometrische Figur, die mit Hilfe einer Kongruentsbewegung auf sich abgebildet wird. Bei dieser Kongruenzbewegung darf es sich nicht um die Identität handeln. Eine geometrische Figur allgemein ist eine Punktmenge der Ebene. Im Fall einer Geraden ist die Punktmenge unendlich, im Fall von einer Linie vollständig umschlossenen Fläche ist die Punktmenge endlich.

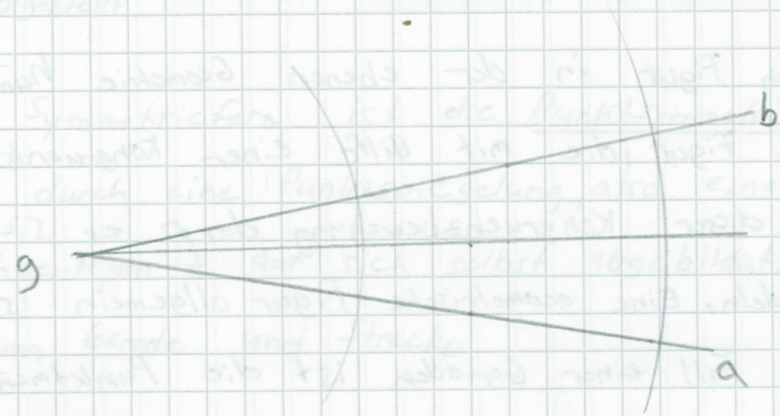
Verschiedene Bewegungen bilden Figuren auf sich selbst ab. Mit ihrer Hilfe wird die Symmetrie einer Figur festgestellt. So ist eine Figur <u>achsensymmetrisch</u>, wenn es eine Achsenspiegelung gibt, die jeden Punkt der Figur auf der Figur selbst wieder abbildet und dabei weder die Form, Größe oder Lage der Figur verändert.

Eine Gerade ist achsensymmetrisch. Dabei muss die Spiegelachse g und h müssen identisch sein. Im ersten Fall ist h eine Fixgerade, im zweiten eine Fixpunktgerade.



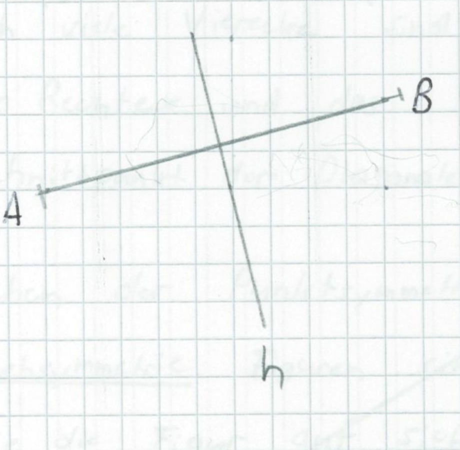


Auch Winkel sind achsensymmetrisch. ~~Ihre~~ Ihr bildet die Winkelhalbierende die Symmetrieachse

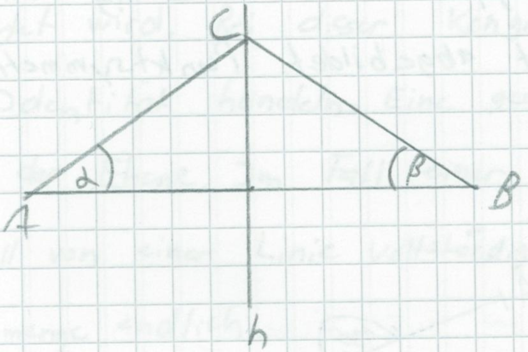


Schenkel a des Winkels ∡ (a,b) wird auf Schenkel b abgebildet und b~~au~~ auf a.

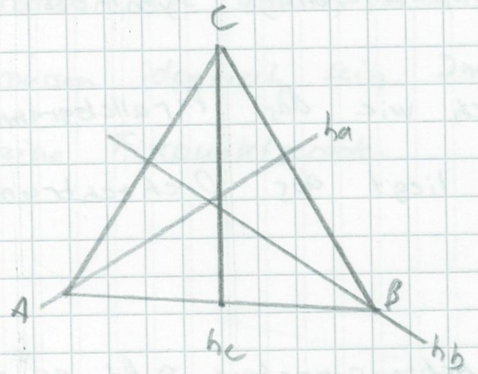
Auch Strecken sind achsensymmetrisch.
Die Spiegelachse h verläuft senkrecht durch den Mittelpunkt der Strecke AB (Mittelsenkrechte)
oder die Strecke ist Teilmenge der Spiegelachse



Auch Flächen können achsensymmetrisch sein. In der Gruppe der sind gleichschenklige Dreiecke achsensymmetrisch. Die Symmetrieachse h verläuft durch den Scheitelpunkt und den Mittelpunkt der Grundseiten (Seitenhalbierende). Aufgrund der Symmetrie sind die Basiswinkel α und β gleich groß $\rightarrow \alpha = \beta$



Bei gleichseitigen Dreiecken sind drei Symmetrieachsen zu erkennen. Diese sind die Seitenhalbierenden bzw. Winkelhalbierenden bzw. Mittelsenkrechten. Der Schnittpunkt der Symmetrieachsen ist der Umkreismittelpunkt und der Inkreismittelpunkt.



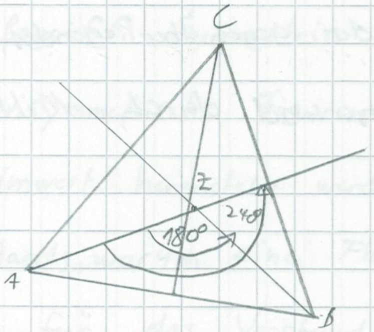
Auch viele Vierecke sind achsensymmetrisch.
Symmetrieachsen können hier eine oder beide Diagonalen (z.B. bei der Raute) und/oder die Seitenhalbierenden seine. Nähere Zusammenhänge werden in Aufgabe 4) dargestellt.

Eine weitere Symmetrieform ist die <u>Punktsymmetrie</u>. Punktsymmetrische Figuren werden durch eine Punktspiegelung, also eine Drehung um 180° um ein Drehzentrum Z auf sich selbst abgebildet. Punktsymmetrisch sind wiederum Gerade und Strecke.

Bei der Strecke ist das Zentrum der Punktspiegelung der Mittelpunkt der Strecke.
Dreiecke sind nicht punktsymmetrisch, da bei einer Drehung um 180° die Spitzen des Dreiecks auf der Geraden durch die gegenüberliegenden Seiten liegen. Es entsteht ein Stern. Dieser kann allerdings symmetrisch sein.

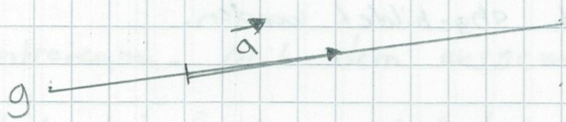
Auch viele Vierecke sind punktsymmetrisch wie das Parallelogramm, die Raute, das Rechteck und das Quadrat. Dabei liegt das Drehzentrum in Schnittpunkt der Diagonalen.

Neben der Punktsymmetrie und der Achsensymmetrie gibt es die <u>Drehsymmetrie</u>. Figuren sind drehsymmetrisch, wenn es eine Drehung gibt, die die Figur auf sich selbst abbildet. Der Drehwinkel ε ist dabei abhängig von der Figur. Gleichseitige Dreiecke sind drehsymmetrisch. Dabei kann das Dreieck um 120°, 240° oder 360° mit und gegen den Drehsinn gedreht werden.



Auch das Quadrat ist drehsymmetrisch ~~ε~~ ε können hier 90° und Vielfache davon sein. Der Zusammenhang lässt sich allgemeiner ausdrücken. Alle regelmäßigen Vielecke (alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß) sind punktsymmetrisch. Der Drehwinkel kann über die Zahl n der Ecken bestimmt werden. $\varepsilon = 360° : n$.

Eine vierte Symmetrieform ist die Schubsymmetrie. Schubsymmetrisch sind Figuren, die durch Verschiebung um Vektor $\vec{a}$ auf sich selbst abzubilden sind. Dazu zählt die Gerade. Der Vektor $\vec{a}$ liegt auf der Geraden (ist Teilmenge der Geraden)

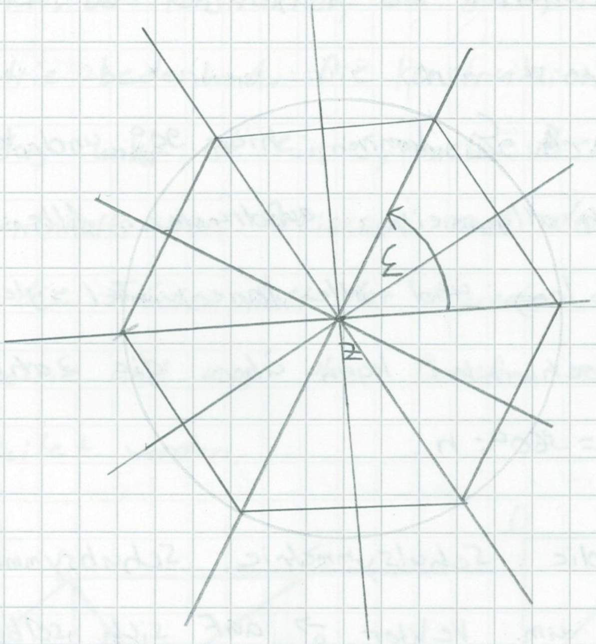


Auch unendliche Bandonamente sind schubsymmetrisch

Der Kreis ist eine Figur, die viele Symmetrien vereinigt. So ist ein Kreis punktsymmetrisch um seinen Mittelpunkt, drehsymmetrisch um jeden Winkel und achsensymmetrisch an jeder Geraden durch den Mittelpunkt.

Auch regelmäßige Vielecke sind vielfältig symmetrisch. Haben sie eine jede Anzahl Ecken sind sie punktsymmetrisch um den Mittelpunkt. Drehsymmetrisch sind sie um $\varepsilon = 360° : n$ und Vielfache von ε.

Auch Achsensymmetrien ~~geben~~ treten auf. Beim Fünfeck z.B. verlaufen Symmetrieachsen durch Ecken und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Beim Sechseck durch gegenüberliegenden Ecken und durch Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten.



Kongruenzbewegungen lassen sich verknüpfen.
So können mehrere Kongruenzbewegungen hintereinander ausgeführt werden und ergeben wieder eine Bewegung. Auch symmetrische Figuren können durch mehrere verknüpfte Bewegungen auf sich abgebildet werden.

2) Erläutern Sie die didaktische Bedeutung des Symmetriebegriffs im Mathematikunterricht der Haupt-/Mittelschule (Situationen bzw. Anwendungsbereiche, Lernziele)!

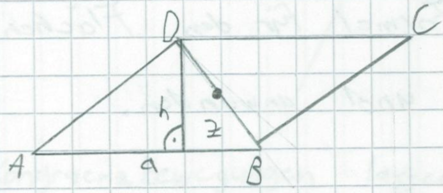
Der Symmetriebegriff ist zentrale Grundlage für die Geometrie. Im Unterricht der Haupt- bzw. Mittelschule ist er besonders zentral, weil er ein handlungsorientiertes Arbeiten und Lernen ermöglicht.
In der 5. Klasse wird der Symmetriebegriff im Zusammenhang der Achsenspiegelung eingeführt. Figuren sind dann achsensymmetrisch, wenn eine

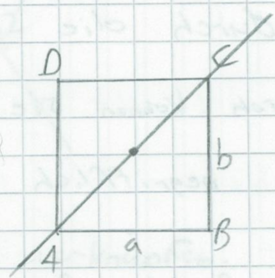
~~Symmetrische~~ Symmetrieachse gefunden werden kann. Hier sollen die Schüler den Begriff Symmetrie im Sinne Vollraths verstehen, Symmetrien erkennen, achsensymmetrische Figuren herstellen, Achsen einzeichnen. Auch können Bezüge zur Umwelt hergestellt werden. Die Schüler argummentieren mathematisch Standards, warum eine Fläche ~~oder eine Gegen~~ besonders funktional ist. Auch für das Verständnis von Parallelität und Orthogonalität ist Symmetrie wichtig. Hier stellen die Schüler ~~Faltwi~~ Feltwinkellos, die auf Achsenspiegelung basieren. Parallelität, Orthogonalität und Achsensymmetrie sind wiederum wichtig, um die Eigenschaften von Quader und Rechteck zu erfassen.

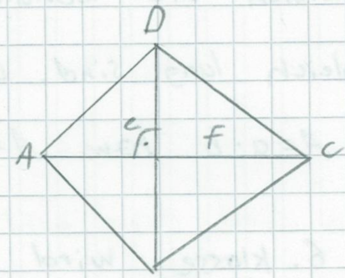
Hier erkennen die Schüler durch die Symmetrie, dass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Dadurch können sie die Formel für den Flächeninhalt $A = a \cdot b$ bzw. $A = a^2$ begrifflich fassen und anwenden.

In der 6. Klasse wird die Punkt-, Dreh- und Schubsymmetrie eingeführt, indem die zugehörigen Kongruenzbewegungen behandelt werden. Auch hier benennen die Schüler Symmetrien, stellen sie her, zeichnen Drehzentren ein. Mit dem ausgeweiteten Symmetrieverständnis argumentieren die Schüler bei Beweisen, und kategorieren Vierecke im Haus der Vierecke (s. Aufg. 4). Auch wird der Kreis eingeführt. Dieser wird mit dem Zirkel gezeichnet, wobei vor allem Drehsymmetrie zur Anwendung kommt. Auch Winkel werden eingeführt, gemessen und abgetragen. Hier ist Achsensymmetrie bei der Herstellung der Winkelhalbierenden wichtig. Die Schüler halbieren Winkel durch Ausmessen und rechnerisches halbieren. Auch für Quader und ~~Wür~~ Würfel sind Symmetrien zentral, werden dem Schülern aber eher nicht bewusst gemacht. Hierbei handelt es sich um die Symmetrien im Raum.

In der 7. klasse werden Dreiecke behandelt. Dann werden die Begriffe rechtwinkliges, gleichseitiges und gleichschenkliges Dreieck eingeführt. Die Schüler korigieren die Dreiecke über Symmetrien in einem Haus oder Dreiecke. Hierzu müssen sie Dreh- und Achsensymmetrie erkennen. Der konstruktion des gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrie bedenkend. Die konstruktion wird über die Symmetrie begründet. Besonders unklar ist ein Symmetrieverständnis aber beim Erarbeiten des Flächeninhalts von Dreiecken und daraus zusammensetzbaren Vierecken. So kann die Flächeninhalt des Dreiecks aus dem Parallelogramm durch Punktsymmetrie und aus dem Drachen oder Quadrat durch Achsensymmetrie abgeleitet werden.







$A_\Delta = \frac{1}{2} A_{ABCD}$

$= \frac{1}{2} a \cdot h_a$

$A_\Delta = \frac{1}{2} A_{ABCD}$

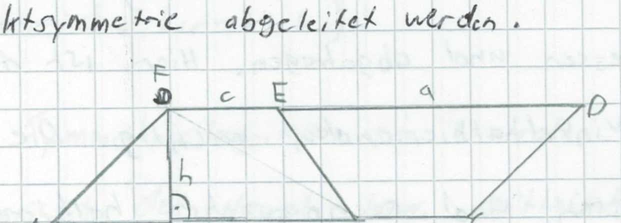
$= \frac{1}{2} a \cdot b$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot A_{Drache}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot f$

Der Flächeninhalt des Trapezes kann aus dem Parallelogramm durch Punktsymmetrie abgeleitet werden.



A_{Trapez}

$= \frac{1}{2} \cdot A_{\square}$

$= \frac{1}{2} (a+c) \cdot h$

Hierbei lernen die Schüler zu argumentieren, Probleme mathematisch lösen und ihre Ideen und Lösungsätze zu kommunizieren

In der 8. Klasse werden die Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal eingeführt. Hier lernen die Schüler zu arbeiten und Beziehungen zwischen Elementen einer Figur logisch zu nutzen. Eingeführt wird die Konstruktion der Mittelsenkrechten, des Fläcken eines Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g und das Errichten einer Senkrechten zu einer Geraden g in P, P ∈ g. Diese Grundkonstruktionen werden zur Konstruktion von Vierecken verwendet.

Auch der Zylinder kann als Produkt von Symmetrien begriffen werden. Hier ist es denkbar ein Rechteck um eine seiner Seiten kreisen zu lassen und so einen Zylinder entstehen zu lassen. Dies schult das räuml. Denken.

In der 9. Klasse werden regelmäßige Vielecke behandelt. Dort sind Symmetrien von großer Bedeutung beim Verstehen von Zusammenhängen und bei der Konstruktion (s. Aufg. 1). Besonders beim Sechseck ist die Konstruktion über Symmetrieeigenschaften zu lösen und zu beweisen, da die Bestimmungsdreiecke gleichseitig kongruente Dreiecke sind.

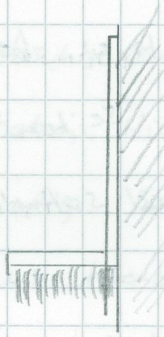
Auch der Kegel kann, analog zum Zylinder als ein um eine Kathete kreisendes rechtwinkliges Dreieck verstanden werden

3) Beschreiben Sie handlungsorientierte Aktivitäten zur Achsensymmetrie! Welche Einsichten sollen Schülerinnen und Schüler dabei gewinnen?

Die Achsensymmetrie wird in der Hauptschule in der 5. Klasse eingeführt. Zum Umfassenden Verstehen eines ist nach Bruner endliches Arbeiten nötig. Um Achsensymmetrie zu erarbeiten, sind viele ~~ha~~ handlungsorientierte Zugänge denkbar.

Zu Beginn der Auseinandersetzung mit Achsensymmetrie wird die Arbeit auf Figuren mit nur einer Spiegelachse ~~zentriert~~ zenziert.

In einer Einstiegsstunde können sie die Schüler über Symmetrische Gegenstände oder Bilder denn Phänomen annähern. So kann ein Besen präsentiert werden der längs halb verdeckt ist. Die Schüler mutmaßen auf Basis ihrer Erfahrung wie der Besen komplett aussieht und zeichnen ihn.



Zur Auflösung wird ein Besen präsentiert der wieder ~~Erwarten~~ erwartet nich symmetrisch ist. Die Schüler fegen mit diesem und bemerken, dass auch ein schiefer Besen funktional sein kann, etwa um unter einem Schrank zu fegen. Gemeinsam werden Gegenstände gesammelt, die symmetrisch und dadurch praktisch sind (Jacke, Hose, Topf, ...) und andere, die durch ungünstige Symmetrien ihre Funktionalität verlieren würden (Löffel mit zwei Enden, Kanne mit zwei Ausgüssen, ...).

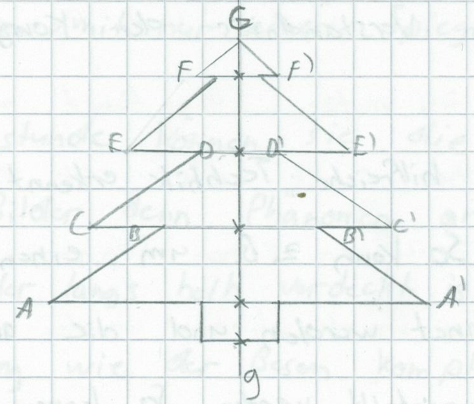
Um zur Bild- bzw. Zeichenebene überzugehen können in Fotos von Gebäuden oder Gesichtern Spiegelachsen eingezeichnet werden. Hilfreich ist hier eine aktive Kontrolle der Richtigkeit der Achse durch Anlagen eines Spiegels. Die Schüler gewinnen so die Einsicht, dass beide Flächen neben der Achse „gleich aussehen" und erkennen so, dass jedem Punkt genau ein Bildpunkt zugeordnet werden muss. Auch hier kann Symmetrie wieder als „schön" diskutiert werden. Auch bei geometrischen Figuren werden Symmetrieachsen eingezeichnet, Vorübung kann das Falten sein. Rechtecke, Dreiecke, Quadrate, Drachen u.s.w werden aus Papier ausgeschnitten und so gefaltet, dass

Schüler die Einsicht, dass die beiden Teilflächen gleich groß sind und die gleiche Form haben. Ein Verständniss der Kongruenz bahnt sich an.

Das Falten kann außerdem als hilfreiche Technik erkennt werden, um selbst Symmetrien genau herzustellen. So kann z. B. um einen Schmeterling zu malen nur eine Seite gezeichnet werden und die andere durch ausschneiden bzw. abpausen am Fenster hergestellt werden. So lernen die Schüler ein ~~ein~~ wichtiges Verfahren um auch im Werken oder textilen Gestalten symmetrische Schablonen herzustellen.

Eine Vorübung um Symmetrien von selbst entstehen zu lassen sind Klecksbilder. Die Anfertigung dürfte schon aus der Grundschule bekannt sein. Nun bewirken die Schüler die Faltlinie aber als Spiegelachse. Ein ~~her~~ hier angesetztes Spiegel ~~w~~ würde das Bild genauso darstellen.

Nach dem Falten und Einlegen der Spiegelachse mit Hilfe von Spiegeln, soll die Symmetrieachse mit dem Geodreieck eingezeichnet werden. Dazu sind besonders der Nullpunkt und die Nullinie relevant und müssen eingeführt werden. Zunächst verbinden die Schüler Punkt und Bildpunkt mit einer Strecke. Dann wird der Mittelpunkt der Strecke errechnet (Achtung: keine Division von Dezimalzahlen möglich!) oder mit dem Geodreieck ermittelt und eingezeichnet. So wird mit mehreren Punkten und Bildpunkten verfahren. Verbindet man die Mittelpunkte, entsteht die Symmetrieachse. Hierbei gewinnen die Schüler die Einsicht, dass die Symmetrieachse der Ort ist, an dem für jeden Punkt P die Strecke zu einem Punkt ~~A~~ und seinem Bildpunkt A' gleich lang ist. Diese Einsicht ist zur ~~Ko~~ Konstruktion der Mittelsenkrechten zentral.

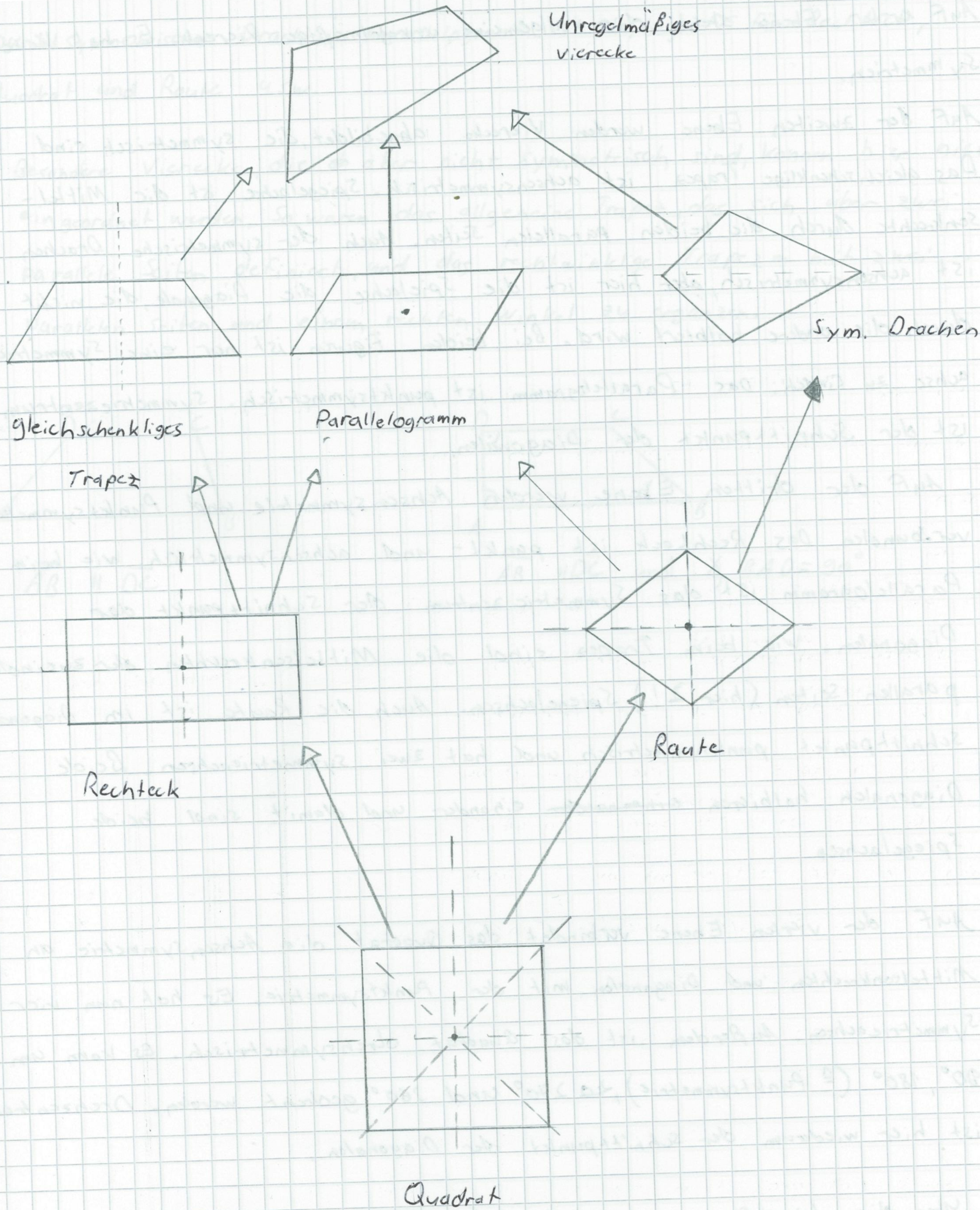


Dann müssen abschließend Figuren eingeführt werden, die mehr als eine Symmetrieachse haben. Hierzu zählen gleichseitige Dreiecke, Rauten, Quadrate, Rechtecke, regelmäßige Vielecke und Kreise.

Zentrale Einsicht hierbei ist, dass Symmetrieachsen nicht immer durch die Mittelpunkte von Seiten verlaufen müssen, sondern auch durch die Eckpunkte. Figuren, an denen über Folien oder Zeichnen gearbeitet werden ~~sind~~ kann, sind z.B. Schneeflocken und Sterne, sofern achsensymmetrische Fälle ausgewählt werden.

4) Klassifizieren und Ordnen Sie die ebenen Vierecke! Gehen Sie dabei auf Symmetrieeigenschaften ein!

Vierecke können in einem Haus der Vierecke geordnet werden. Dabei handelt es sich um eine Hasse-Diagramm. Ordnungskriterium können Winkel, Parallelität der Seiten, Länge, Lage oder ~~Teilmen~~ Teilungsverhältnisse der Diagonalen, ... sein. Hier soll nach Symmetrien geordnet werde.


Unregelmäßiges
Vierecke
Sym. Drachen
gleichschenkliges
Trapez
Parallelogramm
Rechteck
Raute
Quadrat

Auf erster Ebene steht das allgemeine, unregelmäßige Viereck. Es hat keine Symmetrien.

Auf der zweiten Ebene werden Vierecke abgebildet, die symmetrisch sind. Das gleichschenklige Trapez ist achsensymmetrisch. Spiegelachse ist die Mittelsenkrechte durch die beiden parallelen Seiten. Auch der symmetrische Drachen ist achsensymmetrisch, aber hier ist die Spielachse die Diagonale, die nicht durch die andere halbiert wird. Bei beiden Figuren ist nur eine Symmetrieachse zu finden. Das Parallelogramm ist punktsymmetrisch. Symmetriezentrum ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

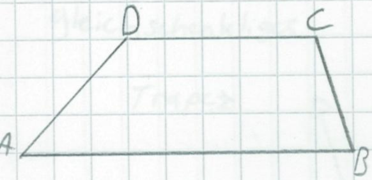
Auf der dritten Ebene werden Achsensymmetrie und Punktsymmetrie verbunden. Das Rechteck ist punkt- und achsensymmetrisch. Wie beim Parallelogramm ist das Symmetriezentrum der Schnittpunkt der Diagonalen. Wie beim Trapez sind die Mittelsenkrechten der zueinander parallen Seiten (hier 2!) Spiegelachsen. Auch die Raute ist im Diagonalen schnittpunkt punksymmetrisch und hat zwei Symmetrieachsen. Beide Diagonalen halbieren ~~einander~~ einander und damit sind beide Spiegelachsen.

Auf der vierten Ebene verbindet das Quadrat die Achsensymmetrie an Mittelsenkrechten und Diagonalen mit der Punktsymmetrie. Es hat nun vier Symmetrieachsen. Außerdem ist das Quadrat drehsymmetrisch. Es kann um 90°, 180° ($\hat{=}$ Punktsymmetrie), ~~40~~ 240° und 360° gedreht werden. Drehzentrum ist hier wiederum der Schnittpunkt der Diagonalen.

Über die Klassifizierung und Ordnung der Vierecke im Haus der Vierecke können bestimmte Vierecke definiert werden. So ist zum Beispiel ein Rechteck Unterbegriff eines Parallelogramms.

Es besteht eine Relation. Ein Rechteck ist damit ein Parallelogramm, punktsymmetrischer Drachen. Parallelogramm ist Oberbegriff für Rechteck, Quadrat und Raute u.s.w.

Besondere Vierecke, die aber nicht symmetrisch sind, können hier nicht eingeordnet werden. So wären das allgemeine Trapez, das sich über zwei parallele Seiten definiert, und das rechtwinklige Trapez mit zwei parallelen Seiten und einem rechten Winkel zu ergänzen.



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ und $\sphericalangle BAD = 90^\circ$