

①

Thema Nr. 3

1.a) Zur Bearbeitung dieser Aufgabe wird für einen vorgegebenen Umfang die Fläche ~~des~~ eines allgemeinen Rechtecks bestimmt. Anschließend werden die Seitenlängen des Rechtecks gesucht, für die der Flächeninhalt maximal wird.

Zur Lösung wird die Problemstellung im folgenden als „Extremwertaufgabe“ gelöst.

Es sei U der vorgegebene Umfang und A der sich ergebende Flächeninhalt des Rechtecks. a, b sind die Seiten des Rechtecks.

$$\underline{U = 2a + 2b} \quad \text{ sowie } \underline{A = a \cdot b} \quad , a, b > 0 \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \frac{U}{2} - b = a$ diese Umformung des Umfangs wird nun in die Gleichung des Flächeninhalts eingesetzt.

$$\Rightarrow A(b) = \left(\frac{U}{2} - b\right) \cdot b$$

$$\underline{\underline{A(b) = \frac{U \cdot b}{2} - b^2}}$$

Es handelt sich nun um eine quadratische Gleichung, von der der Extremwert (Scheitel) bestimmt werden soll.

Für die Lösung wird im folgenden nicht die Ableitung genutzt, sondern die quadratische Ergänzung, da dieses Verfahren auch in der Sekundarstufe I genutzt werden kann.

②

$$\Rightarrow A(b) = -b^2 + \frac{u}{2} \cdot b$$

$$= -\left(b^2 - \frac{u}{2}b\right)$$

$$= -\left[\left(b - \frac{u}{4}\right)^2 - \left(\frac{u}{4}\right)^2\right]$$

$$= -\left(b - \frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{u}{4}\right)^2 \Rightarrow \underline{S\left(\frac{u}{4} \mid \frac{u^2}{16}\right)}$$

Damit wird der Wert für den Flächeninhalt des Rechtecks für $b = \frac{u}{4}$ maximal.

Durch den vorgegebenen Umfang u und die nun bestimmte Seitenlänge b des Rechtecks kann die Seitenlänge a bestimmt werden.

$$u = 2a + 2b$$

$$\Rightarrow u = 2a + 2 \cdot \frac{u}{4} \quad | \text{ einsetzen von } b = \frac{u}{4}$$

$$u = 2a + \frac{u}{2} \quad | -\frac{u}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{2} = 2a \quad | :2$$

$$\underline{a = \frac{u}{4} = b}$$

Da somit $a = b$ ist, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks bei gegebenem Umfang maximal wird, handelt es sich um ein Quadrat.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit der Aufgabe wäre mit Hilfe eines „Dynamischen Geometrie Programms (DGS)“. Hier könnte ~~man~~ so verfahren werden, dass ein Schieberegler/Eingabefeld für den Umfang sowie eines für eine Seitenlänge angeboten wird. Die zweite Seitenlänge wird über die Umfangsformel des Rechtecks berechnet. Man kann ein entsprechendes Rechteck konstruiert werden, dessen Flächeninhalt durch das DGS gemessen wird.

③

Nun kann bei zuvor eingestelltem Umfang durch ändern der Seilenlänge jenes Rechteck gesucht werden, welches die größte Fläche einschließt.

Stellt man zusätzlich einen Punkt P (veränderbare Seilenlänge/ Flächeninhalt) in dem DGS dar und lässt für verschiedene Seilenlängen die Ortskurve zeichnen, erhält man eine nach unten geöffnete Parabel. Jedoch muss hierzu evtl. der Maßstab der Seilenlänge und des Flächeninhalts wegen der übersichtlichen Darstellung geändert werden. *

Mathematisch ist diese zweite Möglichkeit bereits in unteren Klassen möglich, da keine Rechenwege und keine quadratischen Funktionen nötig sind und somit auch schon direkt bei der Einführung des Umfangs und des Flächeninhalts möglich und sinnvoll. * Möglich ist auch der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprog. (Wertetabelle) oder ein entsprechender Taschenrechner

b) Nun sei der Flächeninhalt vorgegeben und der kleinstmögliche Umfang soll bestimmt werden. Diese Aufgabe soll analog zu Aufgabenteil a) gelöst werden. Hier soll nun die Ableitung genutzt werden, um die Aufgabe zu lösen.

$$\underline{U = 2a + 2b} \quad \text{und} \quad \underline{A = a \cdot b} \quad a, b > 0 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow a = \frac{A}{b}$$

diese Beziehung für a wird nun in die Umfangsformel eingesetzt.

$$\Rightarrow U(b) = \frac{2A}{b} + 2b$$

Nun soll $U(b)$ abgeleitet werden, um das Minimum zu bestimmen.

$$u'(b) = -\frac{2A}{b^2} + 2 ; \quad 0 \stackrel{!}{=} -\frac{2A}{b^2} + 2 \quad | + \frac{2A}{b^2} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2A}{b^2} = 2 \quad | :2 \cdot b^2$$

$$A = b^2$$

$$\Rightarrow \underline{\pm \sqrt{A} = b}$$

Da für Längen nur positive Werte von b in Frage kommen gilt:

$$\underline{b = \sqrt{A}}$$

Dies wird nun in die Flächeninhaltsformel eingesetzt:

$$\Rightarrow A = a \cdot \sqrt{A} \quad | : \sqrt{A}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A}} = a$$

$$\frac{A \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{A}} = a \Rightarrow \underline{a = \sqrt{A} = b} \Rightarrow \text{Quadrat}$$

Und somit ^{hat} ~~ist~~ das Quadrat unter allen Rechtecken mit gleichem Flächeninhalt den kleinsten Umfang.

Auch hier bietet sich wieder ein DGS für die Lösung an.

Diese Aufgabe halte ich jedoch für mathematisch anspruchsvoller, da mit der Gleichung $U = 2 \cdot \frac{A}{b} + 2b$ nicht so einfach und vertraut umgegangen werden kann wie mit einer quadratischen Gleichung.

Es könnte hier alternativ auch mit einer Wertetabelle die Lösung bestimmt werden (TKP)

2. Im folgenden sollen inner- und außermathematische Gründe erörtert werden, die für eine Bearbeitung der obigen Aufgaben sprechen.

innermathematisch:

- Vernetzen von Themengebieten: Dies bedeutet im konkreten Fall eine Verbindung zwischen der Geometrie und Funktionen herzustellen. Es soll den Lernenden klar werden, dass geometrische Probleme

⑤

mit Hilfe von Funktionen zu lösen sind. Ebenso soll dem „Schuladendecken“/Trennung von Geometrie und Algebra etc. entgegen gewirkt werden. Dieser Grund ist meines Erachtens auch ein entscheidender Anspruch an den Mathematikunterricht.

~~Dieser Grund gilt hauptsächlich für höhere Klassen~~

- Modellieren

-(neuer Kontext für (bekannte) Aufgaben): Es soll hier gegen die häufig anzufindenden Probleme des Transfers von Aufgaben auf Anwendungen entgegen gewirkt werden. So wird bei der Behandlung solcher Aufgaben von den Lernenden gefordert zuerst einen Zusammenhang zu finden / modellieren, mit dem sie arbeiten können. Ebenso ist zu erkennen, woher beispielsweise quadratische Funktionen kommen, diese können ^{hier} nicht einfach aus dem Schulbuch abgeschrieben und gelöst werden.

- „offene“ Mathematik / mehrere Lösungswege: Für solche Aufgaben gibt es verschiedene Lösungsansätze und somit Lösungswege. Hier besteht die Möglichkeit mehrere verschiedene Lösungsideen der Schüler zu sammeln und zu ~~versuchen~~ versuchen diese entsprechend zu lösen. Es soll erkennbar werden, dass nicht immer der eine oder andere Weg der einzig richtige ist. Dieser Vorstellung, die bei vielen Lernenden vorherrscht, entgegen zu wirken ist auch außermathematisch von Nutzen, da nur so Lösungsstrategien sinnvoll entwickelt werden können.

außermathematisch:

- Alltagsprobleme erkennen: Die Lernenden sollen durch solche Aufgaben erkennen, dass ihr im Mathematikunterricht erworbenes Wissen ~~was~~ nicht nur dort anzuwenden ist. Zum Beispiel kann eine entsprechende Aufgabe entstehen, wenn eine möglichst große Fläche mit einem vorhandenen Zaun

⑥

abgesperrt werden soll. Durch solche Verbindungen zur Schülerwelt soll Interesse an Mathematik geweckt werden.

Desweiteren sollen die Lernenden so erkennen, dass ihre Umwelt von der Mathematik beeinflusst wird, viele Plätze oder Räume sind quadratisch, warum ist dies so!

Dieser Grund ist eng mit dem innermathematischen Grund des Modellieren verknüpft.

- Umgang mit Medien / PC, Taschenrechner etc.: wird die Aufgabe nicht rein algebraisch gelöst, sondern mit Hilfe eines PC's oder Taschenrechners, müssen die Lernenden wissen wie mit diesen Geräten zu arbeiten ist.

Da solche Hilfsmittel im Alltag des Berufsleben eine immer größere Rolle spielen ist es wichtig diese Fertigkeiten schon in der Schule zu trainieren.

- soziale Kompetenz: Da für diese Aufgabe verschiedene Lösungswege möglich sind, müssen diese präsentiert und diskutiert werden. Hierzu ist es nötig entsprechend untereinander zu agieren, soll heißen die Lernenden müssen sich gegenseitig austreten lassen, zuhören, die Aussagen begründen und sich gegebenenfalls gemeinsam für eine Lösung entscheiden.

3. Unterrichtseinheit: Zur Vertiefung von Quadratischen Funktionen

1. Sachanalyse, siehe: Aufgabenteil 1a

2. Lernvoraussetzungen:

- Die Lernenden sind vertraut mit dem Umgang mit quadratischen Funktionen
- Die Lernenden kennen den Umfang sowie den Flächeninhalt eines Rechtecks
- Die Lernenden kennen DGs, Tabellenkalkulation, grafischer Taschenrechner und können diese sinnvoll nutzen.
- Die Lernenden sind in der Lage in Gruppen zu arbeiten und

3. Lernziele:

Grobziele: - Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, welches Rechteck bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt besitzt...

- Die Lernenden sollen ihr Denken vernetzen; Zusammenhang innerhalb der Mathematik sehen

Feinziele: - Die Lernenden sollen die Aufgabenstellung erkennen und verschiedene Lösungsansätze erarbeiten, modellieren / Problemlösen.

- Die Schülerinnen und Schüler sollen in Gruppen diese verschiedenen Lösungsansätze bearbeiten und anschließend präsentieren können

- Die Lernenden sollen die verschiedenen Lösungen vergleichen und bewerten

- erkennen, dass sich Mathematik entwickelt.

4. Unterrichtsverlauf

I Motivation/Einführung: Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Aufgabe ein Rechteck mit dem Umfang 16 cm zu zeichnen.

Anschließend soll jeder für sein Rechteck den Flächeninhalt bestimmen, wer hat die größte Fläche eingeschlossen? Ist dies wirklich die größtmögliche Fläche, und wie groß genau ist diese?

II Problemstellung: Durch die vorhergehende Einführung ist den Schülern klar, dass der größtmögliche Flächeninhalt eines Rechtecks bei gegebenem Umfang ermittelt werden soll. Hierzu werden nun gemeinsame Lösungsansätze gesammelt. Folgende Ansätze sind hier ^{mindestens} wünschenswert und gegebenenfalls zu ergänzen:

- algebraisch

- mit dem PC $\begin{cases} \text{DGS (Dynamisches Geometrieprogramm)} \\ \text{TKP (Tabellenkalkulationsprogramm)} \end{cases}$

- mit dem grafischen Taschenrechner

Nun sollen die Lernenden in Kleingruppen den vorgeschlagenen Ansätzen nachgehen und versuchen den maximalen Flächeninhalt für den Umfang von 16 cm und anschließend eine allgemeine Bestimmungsmöglichkeit zu finden. Dabei soll ihre Arbeit so protokolliert werden, dass diese anschließend den anderen Gruppen vorgesellt werden kann.

Kurze Beschreibung der Lösungsmöglichkeiten:

- algebraisch, DGS siehe 1a

- Tabellenkalkulationsprogramm: Hier ist es denkbar, eine Tabelle zu erstellen, die für einen gegebenen Umfang die Fläche für verschiedene Kombinationen von Seitenlängen berechnet, z.B. könnte man als Startwerte die von den Gruppenmitgliedern gezeichneten Rechtecke wählen. Anschließend könnte man ähnlich einer Intervallschachtelung verfahren und durch überlegtes Vorgehen sich langsam den beiden Seitenlängen für den maximalen Flächeninhalt nähern. Jedoch sind auch hier grundlegende algebraische Umformungen nötig.

Alternativ kann auch wie beim DGS die eine Seitenlänge abhängig der anderen bestimmt werden und so eine Tabelle der möglichen Kombinationen gebaut werden, um den maximalen Flächeninhalt abzulesen.

- Taschenrechner: Dieser kann genutzt werden wie das TKP um Wertetabellen zu erstellen, oder um ^{bei} einer bereits ~~erarbeiteten~~ ~~vorbereiteten~~ Funktion das Extremum zu bestimmen.

Idealerweise kommen die einzelnen Gruppen trotz verschiedener Lösungswege zu dem Ergebnis, dass das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt bei gegebenem Umfang das Quadrat ist.

III Sicherung: Zur Sicherung sollen die einzelnen Gruppen ihre Ergebnisse und Lösungswege vorstellen. Dabei wird Wert auf die Diskussion über das Vorgehen und die Lösung gelegt. Anschließend soll von den Schülern im Klassengespräch eine kurze Übersicht über die Lösungsmöglichkeiten erstellt werden. Zusätzlich sollen die Lernenden nochmals Vor- und Nachteile der einzelnen Methoden diskutieren.

IV Vertiefung: Zur Vertiefung sollen die Schülerinnen und Schüler feststellen, ob der Flächeninhalt eines Quadrats, als der größte der Rechtecke, oder der eines Kreises bei gleichem Umfang größer ist. Auch hier sind die Lösungsmethoden frei. Jedoch soll sich die Klasse für eine gemeinsame Methode entscheiden und diese ausarbeiten.

Mögliche Lösung für die algebraische Methode:

<u>Kreis</u>	<u>Rechteck</u>
$U_{\square} = 2\pi r$	$U_{\square} = 2a + 2b$
$A_{\square} = \pi r^2$	$A_{\square} = a \cdot b$

Dabei gilt $U_{\square} = U_{\square}$ sowie $A_{\square} = a \cdot a$ da das Quadrat den größten Flächeninhalt bei gegebenem Umfang besitzt.

$$\Rightarrow r = \frac{u_0}{2\pi} \Rightarrow A_0 = \pi \cdot \frac{u_0^2}{4\pi^2}$$

$$\underline{\underline{A_0 = \frac{u^2}{4\pi}}}$$

da $\pi < 4$

$$\Rightarrow a = \frac{u_{\square}}{4} \Rightarrow A_{\square} = \left(\frac{u_{\square}}{4}\right)^2 \quad (10)$$

$$\underline{\underline{A_{\square} = \frac{u^2}{4 \cdot 4}}}$$

Da der Nenner bei der Fläche des Rechtecks größer als der der Fläche des Kreises ist, ist die Fläche eines Kreises bei gleichem Umfang immer größer wie die eines ~~Rechtecks~~ Quadrats und damit eines Rechtecks.

4. Methodische / Didaktische Überlegung:

I Einführung: Da die Stunde im Anschluss an die quadratischen Funktionen stehen soll wurde für den Einstieg bewusst eine „geometrische Aufgabe“ gewählt. Diese wirft bei den Schülern die Frage auf was das Ganze soll und macht neugierig. Ebenso ist es die Grundlage um Zusammenhänge innerhalb der Mathematik zu erkennen. Algebra und Geometrie sind nicht zwei verschiedene Arten der Mathematik.

II Problemstellung: Hier soll durch das gemeinsame Erarbeiten von Lösungsansätzen klar werden, dass es nicht nur einen richtigen Weg zur Lösung gibt. Die Kleingruppen (idealerweise zu 3 Schülern, da so Diskussionen möglich und sich keiner zurückziehen kann) sind ideal, um den verschiedenen Ansätzen nachzugehen. Wichtig dabei ist, dass der Lehrer den Gruppen genug Zeit für ihre Ideen lässt, jedoch auch bei Problemen mit Denkanstößen hilft.

Durch ~~den~~ die nachfolgende Präsentation wird sichergestellt, dass die Gruppen konzentriert arbeiten.

III. Sicherung: Durch die Sicherung soll den Schülern nochmals deutlich gemacht werden, dass der Weg, der zum Ziel führt nicht fest vorgegeben ist, es ist auch denkbar, dass Gruppen mit identischem Lösungsansatz auf verschiedene Lösungswege kommen. Deshalb soll hier ausführlich über die Lösung und den Weg zur Lösung gesprochen werden. Desweiteren sollen die Schüler jedoch erkennen, dass nicht jeder Weg ideal ist und oft Umwege eingeschlagen werden, auf die bei wiederholter Durchführung vermutlich verzichtet werden würde. So wird klar, dass die den Lernenden bekannte Lösungsmethode nicht vom Himmel gefallen sind, sondern auch erarbeitet wurde, also die Mathematik sich entwickelt.

IV. Vertiefung: Für die Vertiefung wird keine quadratische Funktion genutzt, sondern der Vergleich Flächeninhalt Kreis und Rechteck bei gleichem Umfang. Hier sollen die Schüler sich ein Lösungsverfahren der zuvor mit Vor- und Nachteilen besprochenen aussuchen und einen allgemeingültigen Zusammenhang finden.