

Thema Nr. 3

Aufgabe 1:

lineare Funktionen kann man zunächst rein mathematisch definieren:

Eine Abbildung $f: G_1 \rightarrow G_2$ zwischen zwei Größenbereichen G_1 und G_2 wird als linear bezeichnet, wenn zudem eine proportionale Funktion $p: G_1 \rightarrow G_2$ existiert und entweder $f(x) = p(x)$ oder $f(x) = p(x) + q$ mit $q \in G_2$ gilt.

In dieser mathematischen Definition ist bereits der Zusammenhang zur direkt proportionalen Funktion ersichtlich. Jede direkt proportionale Funktion ist ebenso eine lineare Funktion.

Eine direkt proportionale Funktion kann auf zwei unterschiedliche Weise mathematisch definiert werden:

1. Definition:

Eine Abbildung $f: G_1 \rightarrow G_2$ zwischen zwei Größenbereichen G_1 und G_2 ist ~~ist~~ direkt proportional wenn für $x, y \in G_1$ folgende Eigenschaft ("Summeneigenschaft") gilt: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2. Definition

Eine Abbildung $f: G_1 \rightarrow G_2$ zwischen zwei Größenbereichen G_1 und G_2 ist direkt proportional, wenn folgende Eigenschaft ("Verfälscht Vervielfachungseigenschaft") für alle $x \in G_1$ und $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ gilt:

$$f(qx) = q \cdot f(x)$$

Nachdem jede direkt proportionale Funktion eine lineare Funktion ist, fällt der Begriff der direkten Proportionalität unter den Begriff der linearen Funktion.

Lineare Funktionen können mittels Wertetabellen und Graph im Koordinatensystem dargestellt werden.

Dabei gilt für die Funktionsgleichung:

$$y = mx + t$$

wobei m die Steigung des Graphen ist und t der y -Achsenabschnitt.

Der Graph der linearen Funktion stellt eine Gerade dar.

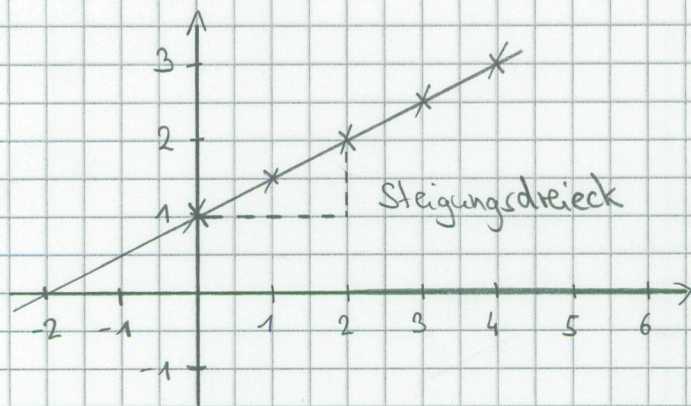
Bsp.: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	...
y	1	1,5	2	2,5	3	...

③

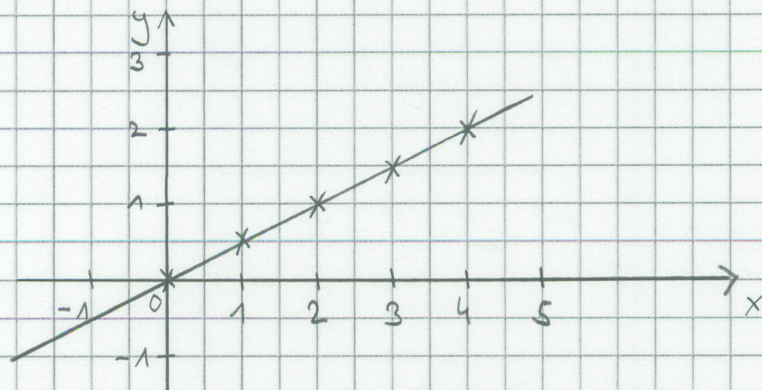
Koordinatensystem:



Der Unterschied bei einer direkt proportionalen Funktion ist lediglich, dass der y-Achsenabschnitt 0 ist.

Damit bleibt der Graph eine Gerade, aber durch den Ursprung (0/0) und wird deshalb Ursprungsgerade genannt. (Funktionsgleichung: $y = m \cdot x$)

Bsp.: $y = \frac{1}{2} x$



Aus der Darstellung ist gut zu erkennen, dass es bei einer linearen Funktion um eine Zuordnung handelt, bei der jedem Wert aus der Ausgangsmenge (Ausgangsgröße) genau ein Wert aus der Zielmenge (Zuordnungsgröße) zugeordnet wird.

Da es sich bei linearen Funktionen auch um direkt proportionale Funktionen handelt, möchte ich noch auf einige

Begrifflichkeiten zur direkten Proportionalität eingehen.

Eine Funktion heißt direkt proportional, wenn der Quotient aus zwei variablen Größen einen konstanten Wert annimmt ($\frac{m}{n} = x$). Dabei wird x als Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Eine direkt proportionale Funktion zeichnet sich also durch Quotientengleichheit aus.

Wenn man zum Beispiel auf die Vorseite zurückgeht, kann man feststellen, dass alle Wertepaare den gleichen Wert annehmen.

$\frac{2}{1}, \frac{3}{1,5}, \frac{4}{2}$ haben alle den Wert 2.

Damit ist der Proportionalitätsfaktor der konstante Wert 2.

Nun noch weitere Eigenschaften für lineare Funktionen.

• Mittelwerteigenschaft: $\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

• Differenzenquotienteigenschaft: $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = k$

für $x > y$ und k als konstanter Wert.

Die zweite Eigenschaft kann wieder auf direkt proportionale Funktionen übertragen werden:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \stackrel{\text{Differenzeigenschaft}}{=} \frac{f(x - y)}{x - y} = \frac{f(z)}{z} = k$$

Hier ist k der Proportionalitätsfaktor und z die Lösung der Gleichung: $y + z = x$ (Lösbarkeitsgesetz).

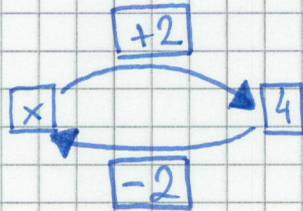
Aufgabe 2:

⑤

Es gibt mehrere Verfahren zur Darstellung und Lösen von linearen Gleichungen, die ^{sich} mit der Jahrgangsstufe und der daraus resultierenden Komplexität der Aufgaben verändern und weiterentwickeln.

1) Pfeilmodell

Bsp.: $x + 2 = 4$



Dies fällt auch unter das Verfahren:

Lösen einer Gleichung mit der Umkehraufgabe.

Die Schüler haben in der 5. Klasse bereits zuvor die Subtraktion als Umkehroperation der Addition, bzw. die Division als Umkehraufgabe der Multiplikation verstanden. Dies kann auf einfache Gleichungen angewendet werden mit Hilfe des Pfeilmodells.

2) Streifenmodell

Bsp.: $x + 2 = 4$

x	2
4	

$x = 2$

Hier wird ebenfalls die Umkehraufgabe $4 - 2$ angewendet. Auch dieses Modell kann lediglich für einfache Gleichungen dieser Art eingesetzt werden.

3) Lösen mittels der Gegenoperation / Umkehrangabe:

⑥

$$\begin{array}{lcl} \text{Bsp.:} & 5x + 4 = 5 & | -4 \\ & 5x + 4 - 4 = 5 - 4 & | \text{TV} \\ & 5x = 1 & | :5 \\ & x = \frac{1}{5} & \end{array}$$

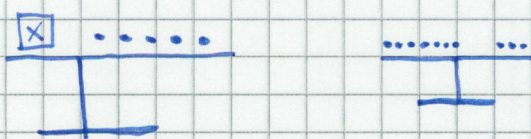
Hier wird jeweils die Umkehroperation durchgeführt.
Bei dieser Gleichung handelt es sich bereits um eine Gleichungsform aus der 6. Klasse (Bruchrechnen).

4) Lösen mittels Äquivalenzumformung

Diese kann auch sehr anschaulich mit dem Waage-Modell dargestellt werden.

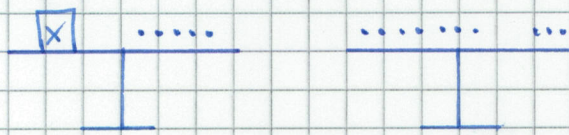
Dabei gibt es zwei unterschiedliche Methoden:

a)



$$\text{Bsp.: } x + 5 = 7 + 3$$

Hier ist x eine leere Box mit fast keinem Eigengewicht. Aus dem Modell ist zunächst ersichtlich, dass die rechte Seite 10 ist ($7 + 3 = 10$). Die Waage ist nicht im Gleichgewicht. Die leere Box muss mit Kugeln aufgefüllt werden. Daraus folgt $x = 5$. 5 Kugeln müssen eingefüllt werden, damit die Waage ins Gleichgewicht kommt.



Bsp.: $x + 5 = 7 + 3$

Die Waage ist bereits im Gleichgewicht. x ist zwar wieder eine Box, aber sie beinhaltet die richtige Anzahl an Kugeln. Die Box ist jedoch verschlossen und der Inhalt nicht sichtbar. Nachdem $7 + 3 = 10$ wieder eindeutig und klar ist, müssen auf beiden Seiten die gleiche Anzahl Kugeln entfernt werden, bis x alleine da steht. Somit ist $x = 5$. Danach kann die Box geöffnet werden und die Kugeln zur Probe herausgeholt werden. Das hat eine entscheidende Wirkung für die Schüler.

Das zweite Modell kommt dem einer linearen Gleichung wohl am ehesten gleich. Die Gleichung hat ein Gleichheitszeichen, weshalb die Waage bereits im Anfang im Gleichgewicht ist.

Des Weiteren wird die Äquivalenzumformung besser dargestellt.

$$x + 5 = 7 + 3$$

$$x + 5 = 10 \quad | -5$$

$$x + 5 - 5 = 10 - 5$$

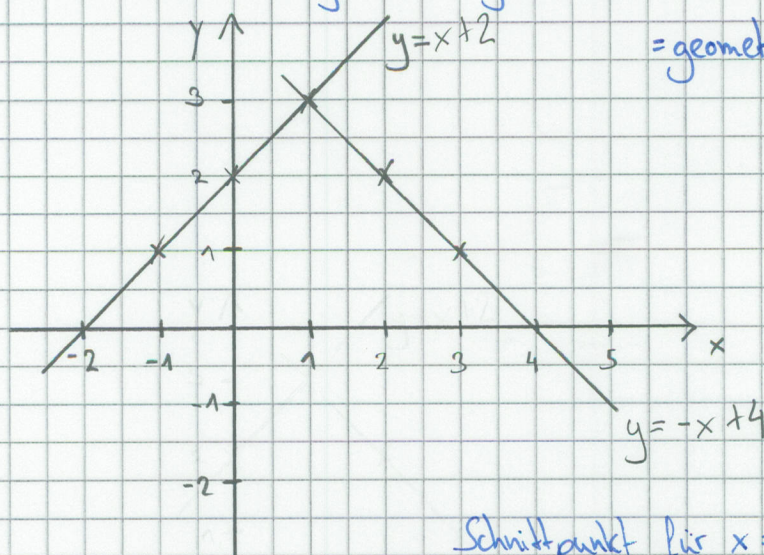
$$x = 5$$

Auf beiden Seiten muss die Operation durchgeführt werden. Das Modell zeigt auch, dass Äquivalenzumformungen die Lösung der Gleichung nicht verändern.

⑧

Allerdings wird der Einsatz bei komplexen Gleichungen der Form $4x + \frac{2}{3} = 5x - \frac{4}{5}$ nicht mehr möglich. Deshalb dient dieses Modell zur Einführung und Veranschaulichung von Äquivalenzumformungen. Bei komplexeren Gleichungen muss der Transfer herangerufen werden.

5) Lösen einer Gleichung durch ^{graphische} geometrische Zeichnung
= geometrische Lösung



Schnittpunkt für $x=1$

Bsp.: $x + 2 = -x + 4$

Dieses Verfahren eignet sich auch für komplexere Gleichungen. Rechte und linke Seite werden im Koordinatensystem mit Graphen dargestellt. Der Schnittpunkt ist die Lösung der Gleichung. Dies kann dann auch rechnerisch & als Probe nachgeprüft werden. Dieses Verfahren findet vor allem Anwendung ab Klassenstufe 8, nach Einführung der linearen Funktionen.

(9)

Allgemein werden lineare Gleichungen folgendermaßen gelöst:

$$\begin{aligned}
 \text{Bsp.: } \frac{4}{5}x - 3 &= 5x + \frac{2}{3} & | +3 \\
 \frac{4}{5}x &= 5x + \frac{11}{3} & | -5x \\
 -\frac{21}{5}x &= \frac{11}{3} & | : \left(-\frac{21}{5}\right) \\
 x &= -\frac{55}{63}
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen werden mittels Äquivalenzumformungen gelöst. Dabei wird versucht, alle ~~x-Terme~~ auf x-Terme auf die eine Seite und alle anderen Terme auf die andere Seite zu bringen. Danach wird x isoliert. Das Ergebnis kann mit Hilfe der Probe, indem man den Wert in die Ausgangsgleichung einsetzt, überprüft werden.

7) Ein weiteres Verfahren, was vor allem in den unteren Jahrgangsstufen als Einstieg verwendet wird, ist die Tabelle:

$$\text{Bsp.: } x + 7 = 10$$

x	x + 7	x + 7 = 10
1	8	f
2	9	f
3	10	r

$$\text{Lösung: } x = 3$$

Aufgabe 3

10

1) Lehrplan

Das Thema lineare Funktionen wird in der 8. Klasse der Hauptschule behandelt. ^① Dabei werden direkt proportionale Funktion (Thema der 7. Klasse) im gleichen Zug nochmal aufgegriffen und wiederholt. Die Schüler lernen lineare Funktionen kennen und untersuchen gegebene Funktionen auf diese Eigenschaft. Dabei werden Begrifflichkeiten wie Funktionsgleichung, Wertepaare und Graph eingeführt bzw. wiederholt.

① und zählt zum Bereich des Sachrechnens.

2) Lernvoraussetzungen

Die Schüler benötigen das Vorwissen aus Klassenstufe 7 über direkt proportionale Funktionen und der Schlussrechnung (z.B. Zwei- bzw. Dreisatz). Außerdem muss für die Unterrichtseinheit bereits die lineare Funktion in den Stunden davor eingeführt worden sein. Außerdem müssen die Funktionsgleichungen $y = m \cdot x + t$ als Charakteristika einer linearen Gleichung eingeführt worden sein.

~~3) Sachanalyse vgl. Aufgabe 1~~

3) Schwierigkeiten

Die Schüler werden vor allem im Hinblick auf die Grundgebürt auf Probleme stoßen. Das Verfahren des Dreisatzes kann nicht ohne Weiteres durchgeführt werden.

Der Unterschied zwischen direkter Proportionalität und linearer Funktion ist eventuell für einige Schüler noch unklar.

4) Einordnung in Unterrichtssequenz

1. Stunde: Wiederholung direkt proportionaler Funktionen
2. Stunde: Einführung linearer Funktionen mit Begrifflichkeiten
3. Stunde: Sachaufgabe „Handytarife“
4. Stunde: Übungsaufgaben zu direkt proportionalen und linearen Funktionen.

5) Sachanalyse

1. Begrifflichkeiten vgl. Aufgabe 1)
2. Sachaufgabe und Lösung

Text: Paul hat letzte Woche seinen 14. Geburtstag gefeiert. Seine Eltern haben ihm versprochen, dass er sich ein erstes Handy kaufen darf. Das Handy zahlen ihm seine Eltern, allerdings muss er die Nebenkosten selbst tragen. Dazu vergleicht er drei unterschiedliche Angebote aus dem Internet:

	A	B	C
Grundgebühr:	5 €	10 €	keine
Freiminuten:	10	20	keine
Kosten pro Minute:	0,80 €	0,85 € 5 Minuten Kosten 3,50 €	0,60 €
Kosten pro SMS:	0,20 €	0,15 €	0,25 €

(12)

Paul geht bei seinen Berechnungen davon aus, dass er im Monat 10 SMS schreibt und 30 Minuten telefoniert. Wie alt ist Paul?

Mögliche Frageskellungen:

- 1) Welches Angebot ist günstiger?
- 2) Welches Angebot nimmt Paul?
- 3) Wo sind die Minuten teurer?
- 4) Wie ändern sich die Preise, wenn Paul 50 Minuten telefoniert?
- : usw.

Lösung:

Angebot A: 30 Minuten - 10 Minuten = 20 Minuten

$$\begin{array}{l} \cdot 20 \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Minute} \hat{=} 0,80 \text{ €} \\ 20 \text{ Minuten} \hat{=} 16,00 \text{ €} \end{array} \right. \cdot 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cdot 10 \left\{ \begin{array}{l} 0,20 \text{ €} \hat{=} 1 \text{ SMS} \\ 2,00 \text{ €} \hat{=} 10 \text{ SMS} \end{array} \right. \cdot 10 \end{array}$$

$$\text{Insgesamt: } 5 \text{ €} + 16,00 \text{ €} + 2,00 \text{ €} = 23,00 \text{ €}$$

Angebot B: 30 Minuten - 20 Minuten = 10 Minuten

$$\begin{array}{l} \cdot 2 \left\{ \begin{array}{l} 5 \text{ Minuten} \hat{=} 3,50 \text{ €} \\ 10 \text{ Minuten} \hat{=} 7,00 \text{ €} \end{array} \right. \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ SMS} \hat{=} 0,15 \text{ €} \\ 10 \text{ SMS} \hat{=} 1,50 \text{ €} \end{array}$$

$$\text{Insgesamt: } 10 \text{ €} + 7,00 \text{ €} + 1,50 \text{ €} = 18,50 \text{ €}$$

Angebot C: $\begin{matrix} 30 \text{ Minuten} \\ \swarrow \searrow \\ 1 \text{ Minute} \\ 30 \text{ Minuten} \end{matrix} \begin{matrix} \cong \\ \cong \end{matrix} \begin{matrix} 0,60 \text{ €} \\ 18,00 \text{ €} \end{matrix} \cdot 30$

$\begin{matrix} 10 \text{ SMS} \\ \swarrow \searrow \\ 1 \text{ SMS} \\ 10 \text{ SMS} \end{matrix} \begin{matrix} \cong \\ \cong \end{matrix} \begin{matrix} 0,25 \text{ €} \\ 2,50 \text{ €} \end{matrix} \cdot 10$

Insgesamt: $18,00 \text{ €} + 2,50 \text{ €} = 20,50 \text{ €}$

Angebot B ist am günstigsten bei der ~~Lösung~~ Nutzung von Paul.

6) Lernziele:

a) Grabiell: Lineare Funktionen beim Vergleich von Handytarifen üben und vertiefen

b) Feinziele:

1. Die Schüler sollen lineare Funktionen auf Handytarife anwenden
2. Die Schüler sollen Rechenwege wiederholen und üben
3. Die Schüler sollen Sachaufgaben nach bestimmtem Schema lösen
4. Die Schüler sollen lineare Funktionen zeichnerisch darstellen können

7) Artikulationschema (45 min.)

(14)

Zeit	Aktionsform / Organisationsform	Medien
3'	Einstieg: Lehrer legt Folie auf mit Bearbeitungsschema für Sachaufgaben. Die einzelnen Punkte werden gemeinsam in einem Lehrer-Schüler-Gespräch wiederholt und erklärt.	Folie 1 (S. 16) OHP
35'	Erarbeitung: Lehrer teilt AB mit Textaufgabe aus und legt zweite Folie auf dem OHP auf. Ein Schüler liest die Sachaufgabe laut und deutlich vor. Danach lesen alle Schüler den Text für sich selbst im Stillen. Lehrer-Schüler-Gespräch: die wichtigsten Aussagen der Aufgabe werden besprochen. Außerdem wird die Fun-Frage beantwortet. Es werden gemeinsam Fragen entwickelt, die der Lehrer an die Tafel schreibt. Danach werden sie nach Wichtigkeit und sortiert und festgelegt die Reihenfolge festgelegt. Die Schüler übernehmen die Fragen ins Heft. ① Ein möglicher Lösungsweg wird im Klassenverband mündlich durch die Schüler zusammengetragen.	AB Folie 2 OHP Tafel Heft

Zeit	Aktionsform / Organisationsform	Medien
	Die Schüler arbeiten nun in Einzelarbeit und berechnen die 1. Fragestellung.	Heft
	Differenzierung: Schüler, die sich mit der Aufgabe bzw. dem Lösungsweg nicht sicher sind, kommen zum Lehrer nach vorne an die Tafel und entwickeln den Lösungsweg. Danach können sie die Aufgabe selbst im Heft lösen.	Tafel Heft
	Weitere Differenzierung: Schüler, die früher fertig sind, schreiben den Lösungsweg an die Tafel , bearbeiten die zweite und möglicherweise weitere Fragestellungen und dürfen danach nach Anweisung durch den Lehrer die Lösung an die Tafel schreiben.	Tafel
7'	Ergebnissicherung: Der Lösungsweg der ersten Fragestellung wird gemeinsam besprochen. Dabei dürfen die Schüler, die den Lösungsweg an an die Tafel geschrieben haben, ihr Vorgehen nochmal darstellen. Es wird gemeinsam ein Antwortsatz formuliert. Der Lehrer schreibt diesen an die Tafel und die Schüler übernehmen ihn in ihr Heft. Hausaufgabe: Versucht Aufgabe 1 graphisch darzustellen und herauszufinden, welches Angebot am günstigsten ist. (Münster reichen)	Tafel

- ① Die Schüler bekommen vom Lehrer den Auftrag in Partnerarbeit einen möglichen Lösungsweg zu entwickeln.

Folie 1

Lösungsschema einer Sachaufgabe

1. Text laut vorlesen
2. Text nochmals leise lesen
3. Wichtigsten Punkte aus dem Text zusammentragen
4. Frage entwickeln
5. a) Lösungsweg mündlich besprechen
b) Überslag machen
6. Lösung bearbeiten
7. Antwortsatz schreiben
8. Ergebnis überprüfen

Folie 2

vgl. Textaufgabe aus der Sachanalyse

Tafel

Die Fragen und der Lösungsweg, vgl. Sachanalyse.

Dieser Abschnitt ist im Bezug auf den Lösungsweg recht individuell und vorher ~~nicht~~ nicht klar vorherzusehen.

Antwortsatz: Tarif B ist bei Pauls Nutzung des Handys am günstigsten.