

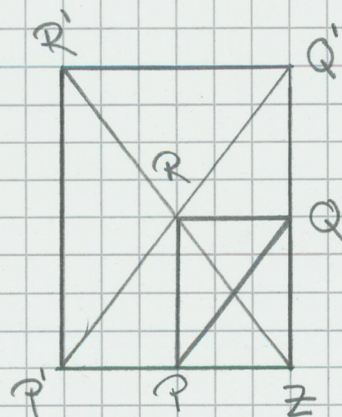
Thema Nr. 2

1. a) Eine Abbildung, die ähnlich ist zu ihrem Ursprungsbild, ~~be~~ bezeichnet man als Ähnlichkeitsabbildung. Unter Ähnlichkeitsabbildungen versteht man die zentrische Streckung, die Klapp-(Spiegel-) Streckung und die Drehstreckung.

Die zentrische Streckung wird folgendermaßen definiert:

jeder vom Zentrum Z verschiedene Punkt P bestimmt mit seinem Bildpunkt P' eine Gerade durch Z , so dass $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$ ist, k ist dabei konstant.

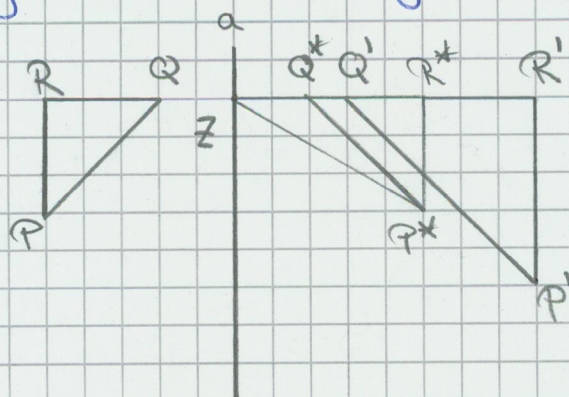
Das Zentrum Z ist Fixpunkt der Abbildung (siehe Abbildung)



②

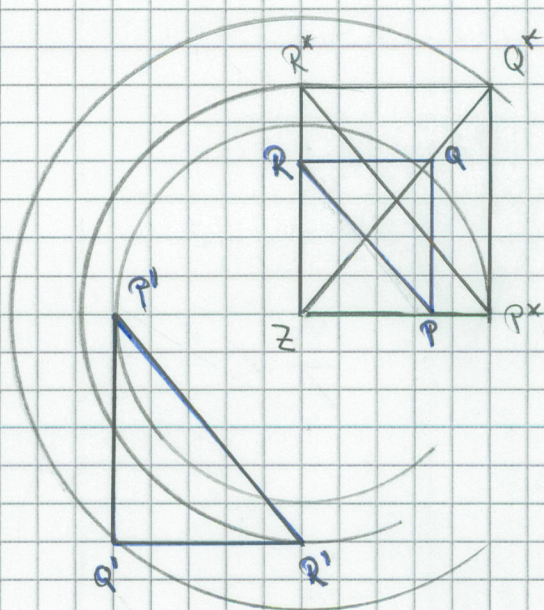
Wie man noch sieht, bleibt der Umlaufsinn gleich und ebenfalls die Winkel, nur die Länge der Strecken nicht, aber dennoch sind sie im Verhältnis gleich.

Die Klapp- (Spiegel-) Streckung ist eine aus einer Achsenspiegelung und einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum auf der Spiegelachse^a zusammengesetzte Abbildung.



Hierbei ändert sich auch der Umlaufsinn, aber die Dreiecke sind winkeltreu und haben gleiche Seitenverhältnisse.

Die Drehstreckung ist eine aus einer zentrischen Streckung und einer Drehung um das Streckungszentrum zusammengesetzte Abbildung. Diese Abbildung ist winkel- und umlaufsinntreu.



③

Die Ähnlichkeitsabbildung gehört zu den Abbildungen in der Ebene, wozu auch die Kongruenzabbildungen gehören.

Ähnlichkeit von Figuren: Figuren sind ähnlich, wenn beide Figuren winkeltreu, geradentreu, kreistreu sind und wenn die Streckenverhältnisse gleich bleiben.

~~Man kann~~ Die Kongruenzabbildungen sind im Vergleich sogar noch bistreu.

b) Kriterien zum Nachweis der Ähnlichkeit zweier ebener Dreiecke sind zum einen die Kongruenzsätze und die Strahlensätze. Von den Kongruenzsätzen gibt es:

- | | |
|-------|-------|
| - SSS | - WSW |
| - SSW | - SWS |

SSS bedeutet, dass, wenn 3 Stellen gleich lang sind es ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c gibt und ein Dreieck $\triangle A'B'C'$ mit den Seiten a', b', c' , und es gilt, dass $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

SSW bedeutet, dass jeweils 2 Seiten der beiden Dreiecke und ein Winkel der beiden Dreiecke gleich sind, wobei der Winkel an einer der beiden gegebenen Seiten liegen muss. Dann gilt, dass beide Dreiecke kongruent sind.

SSWS meint den Seite-Winkel-Seite-Satz. Dieser besagt, dass 2 Dreiecke kongruent sind, wenn jeweils 2 Seiten gleich sind und noch dazu ~~der~~ die Winkel zwischen den beiden Seiten ~~gleich~~ übereinstimmen.

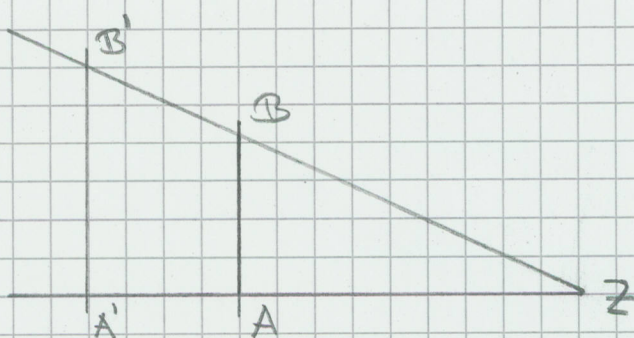
Der Winkel-Seite-Winkel-Satz (WSW) sagt, dass 2 Dreiecke kongruent sind, wenn jeweils eine Seite gleich ist, also gleiche Längen besitzt, und dazu noch die beiden Winkel an dieser Seite jeweils mit den Winkeln des anderen Dreiecks übereinstimmen.

Mit diesen Angaben sind Dreiecke auch erst konstruierbar.

Um die Ähnlichkeit zweier Dreiecke zu beweisen, verwendet man zum einen die Kongruenzsätze aber auch die Strahlensätze. Es gibt 2 Strahlensätze:

$$1. \quad \overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{ZA} : \overline{ZA'} = \overline{ZB} : \overline{ZB'} \\ \overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'} \end{cases}$$

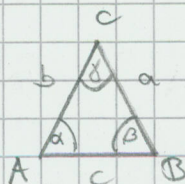
$$2. \overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{ZA} : \overline{ZA'}$$



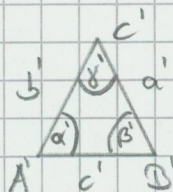
Beweis eines dieser Kriterien :

Beweis des Kongruenzsatzes SSS :

$\triangle ABC$



$\triangle A'B'C'$



$\triangle ABC$ ist ähnlich zu $\triangle A'B'C'$ genau dann wenn
3 Seiten jeweils übereinstimmen, d.h. es gilt
 $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow \beta = \beta'$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma \Rightarrow \gamma = \gamma'$$

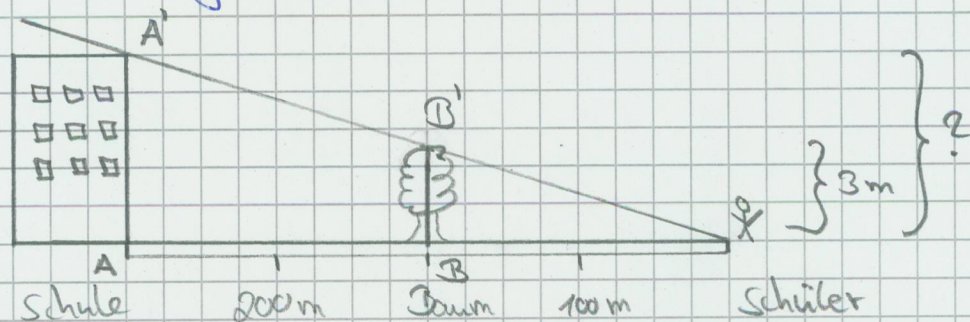
$$180^\circ - \alpha' - \beta' = \gamma'$$

Da alle Winkel übereinstimmen und sogar
alle Seiten gleich sind, sind die beiden
Dreiecke ähnlich und sogar noch kongruent, also
deckungsgleich.

⑥

3. Es handelt sich hier um eine Doppelstunde in der 9. Klasse.

In der ersten Stunde wird der Strahlensatz eingeführt und in der nächsten Stunde soll dieser bewiesen werden. In der ersten Stunde geht man mit den Schülern vor das Schulhaus, man misst den Baum vor der Schule, d.h. die Höhe des Baumes, den Abstand des Baumes von der Schule, und den Abstand eines Schülers zu dem Baum. In der Zeichnung soll es ungefähr so aussehen:



Die Ergebnisse der Messungen wurden festgehalten. Es wurde natürlich auch gesagt, warum man diese Messungen vornahm. Das Ziel war, dass man die Höhe des Schulhauses berechnen wollte.

Zurück im Klassenzimmer hält der Lehrer die Ergebnisse an der Tafel fest:

$$\overline{BB'} = 3 \text{ m}$$

$$\overline{AB} = 200 \text{ m}$$

$$\overline{BS} = 100 \text{ m}$$

Es wird mit den Schülern überlegt, wie man denn dieses Problem lösen könnte. Der Lehrer stellt dann den 2. Strahlensatz vor, durch eine Tafelanschrift mit Zeichnung.

Anhand dieser Formel ~~sollt~~ sollen sie nun zeigen, wie hoch das Schulgebäude ist. Es wird also gerechnet:

$$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SA}} \quad \text{Da } \overline{AA'} \text{ das ist was}$$

man wissen will, formt man um:

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{SB}} \cdot \overline{SA}$$

Nun setzt man die Werte ein:

$$\overline{AA'} = \frac{3 \text{ m}}{100 \text{ m}} \cdot 300 \text{ m} = 9 \text{ m}$$

Diese Rechnung erarbeitet man zusammen mit den Schülern.

In der nächsten Stunde versucht man mit den Schülern zu erarbeiten, wie man zeigt, dass das $\triangle SBB'$ und $\triangle SAA'$ ähnlich sind. Zu allererst lässt man die Schüler überlegen, warum denn die beiden Dreiecke gleich sein könnten. Einige Schüler würden eventuell auf den Stufenwinkel bei parallelen Geraden kommen, s. d. jeweils 2 Winkel in den beiden Dreiecken gleich sind, wodurch auch der 3. Winkel gleich sein muss,

was aber noch nicht hinreichend für eine Ähnlichkeit ist oder sogar kongruent ist.

Die Schüler erinnern sich an die letzte Stunde, in der der Strahlensatz eingeführt wurde und dann noch an die 8. Klasse, in der die Kongruenzsätze ihnen beigebracht wurde, ansonsten gibt der Lehrer Hilfestellungen.

Die Schüler kommen auf die These, dass 2 Dreiecke ähnlich sind, wenn die Streckenverhältnisse übereinstimmen und wenn die Winkel gleich sind.

Dass die Winkel in beiden Dreiecken gleich sind,

^{darauf} kommen die Schüler sofort, da sie den Winkel bei S gemeinsam haben und, da die Winkel β und α Stufenwinkel sind, ebenfalls gleich sind.

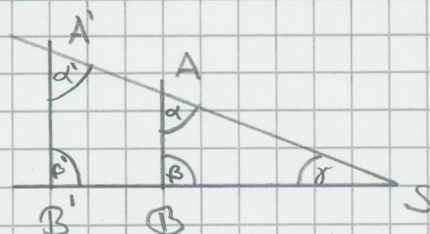
Es muss also noch gezeigt werden dass

$$\overline{AA'} : \overline{BB'} = \overline{SA} : \overline{SB}$$

Dies wird erst anhand des Beispiels der Vorstunde gezeigt, in dem man die Werte einsetzt. So erhält man:

$$\frac{100}{300} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Es wird eine neue Zeichnung an der Tafel angefertigt, in denen auch die Winkel eingezeichnet werden.



(9)

Durch die Stufenwinkel wird gezeigt, dass

$$\alpha = \alpha', \quad \beta' = \beta \text{ ist.}$$

(Wenn man nun $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ berechnet erhält man: (alles durch SS erarbeitet))

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} \quad \beta = 90^\circ = \beta'$$

γ ist in beiden Dreiecken enthalten

$$\text{Nun: } \cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}$$

Ebenso ist es beim anderen Dreieck $\triangle A'B'S$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{B'S}}{\overline{A'S}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'S}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{B'S}}{\overline{A'S}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'S}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{A'S}}$$

$$\overline{AS} = \frac{\overline{BS} \cdot \overline{A'S}}{\overline{BS}}$$

$$\overline{A'S} = \frac{\overline{AS} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BS} \cdot \overline{A'S}}{\overline{BS}} =$$

$$= \frac{\overline{BS}}{\overline{B'S}} \cdot \frac{\overline{AS} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

...

Jedenfalls wird in gemeinsamer Erarbeitung mit den Schülern der Beweis gezeigt.

Im Anschluss daran ist die Stunde beinahe zuende und es werden noch Hausaufgaben vergeben.

2. Strahlensätze kommen in Verbindung mit Teilbarkeit vor, in Bezug auch auf Parallelverschiebung, Achsen Spiegelung und Gleitspiegelung.

Strahlensätze kann man auch sehr gut mit Geonext zeigen, s. d. dies den Schülern sehr anschaulich wird.

Ein spezieller Fall der zentrischen Streckung ist der Strahlensatz, da der Mittelpunkt ein Punkt auf beiden Dreiecken ist.