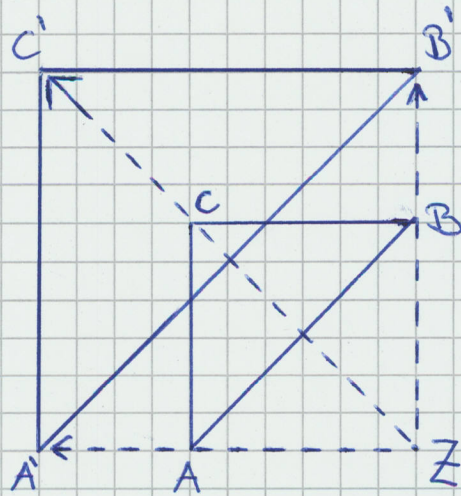


1a) Unter einer Ähnlichkeitsabbildung versteht man eine Abbildung einer Ebene auf sich selbst, deren Strecken verhältnismäßig sind und außerdem ist die Abbildung winkeltreu. Zwei Figuren sind also ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen und jeweils zwei Strecken das selbe Längenverhältnis aufweisen. Zu den Ähnlichkeitsabbildungen gehören:

1. Zentrische Streckung (in Realschule am relevantesten)



Z ist das Zentrum. Jeder Punkt P , der verschieden ist, bestimmt mit seinem Bildpunkt P' eine Gerade durch Z , so dass gilt:

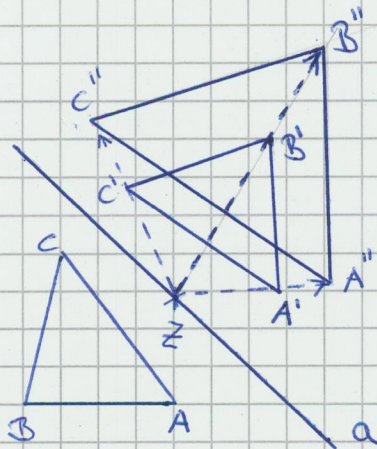
$$\vec{ZP'} = k \cdot \vec{ZP} \quad (\text{wobei } k \text{ konstant ist}).$$

Das Zentrum Z ist Fixpunkt der Abbildung. Eine zentrische Streckung kann eine Figur vergrößern ($|k| > 1$) oder verkleinern ($|k| < 1$). Für $k = 1$

wird die Figur auf sich selbst abgebildet, d.h. die Ähnlichkeitsabbildung ist in diesem Fall eine Kongruenzabbildung. Die Seiten von Urdreieck und Bilddreieck sind jeweils parallel.

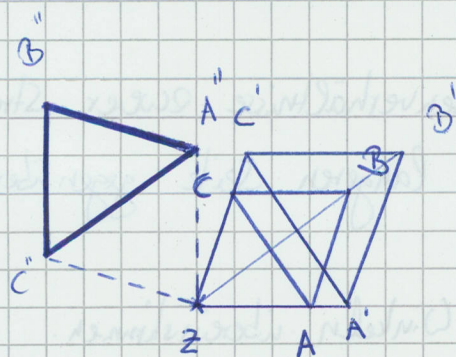
2. Klapp- (Spiegel-) Streckung

Eine ^{Abbildung, die} aus einer Achsenspiegelung und einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z , ^{das} auf der Spiegelachse ^{liegt}, zusammengesetzt ist ~~Abbildung~~ heißt Klapp- oder Spiegelstreckung. Dabei ist die Reihenfolge der Ausführungen der Abbildungen egal. Es ist also egal, ob erst gestreckt und dann gespiegelt oder erst gespiegelt und dann gestreckt wird. Z ist ihr Fixpunkt. Die Achse a , an der gespiegelt wird, ist Fixgerade.

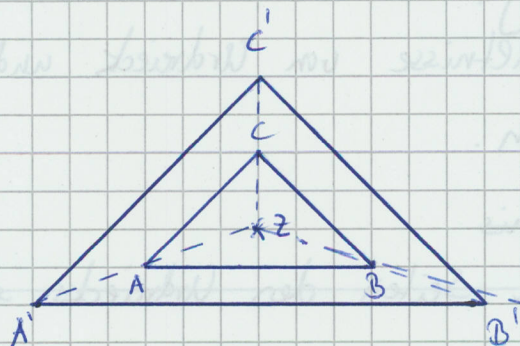


3. Drehstreckung

Eine Drehstreckung ist eine ~~Eine~~ Abbildung, die aus einer zentrischen Streckung und einer Drehung um das Streckungszentrum Z zusammengesetzt ist, ~~heißt Drehstreckung~~. Z ist ihr Fixpunkt und ~~a (die Achse an der gespiegelt wird) ist Fixgerade.~~ Es gibt keine Fixgerade.



Das Zentrum der Zentralen Streckung kann sich auch stets im Inneren der Ufigur befinden.



Die Ähnlichkeitsabbildung, die dessen Streckungsfaktor $k=1$ ist (bei der zentralen Streckung) ist die identische Abbildung.

- 1b) Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich wenn sie
- ~~im Verhältnis~~ das ~~Seitenverhältnis~~ zweier Strecken übereinstimmt und wenn sie in dem Winkel, dem die beiden Seiten einschließen übereinstimmen
 - Wenn sie im Streckenverhältnis alle 3 Seiten übereinstimmen
 - Wenn zwei Winkel und ~~das Streckenverhältnis~~ der an die beiden Winkel anliegenden ~~Strecke~~ übereinstimmen

- wenn jeweils die ~~St~~ Seitenverhältnisse zweier Strecken und der Winkel, der der längeren Seite gegenüberliegt übereinstimmen.
- wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen.

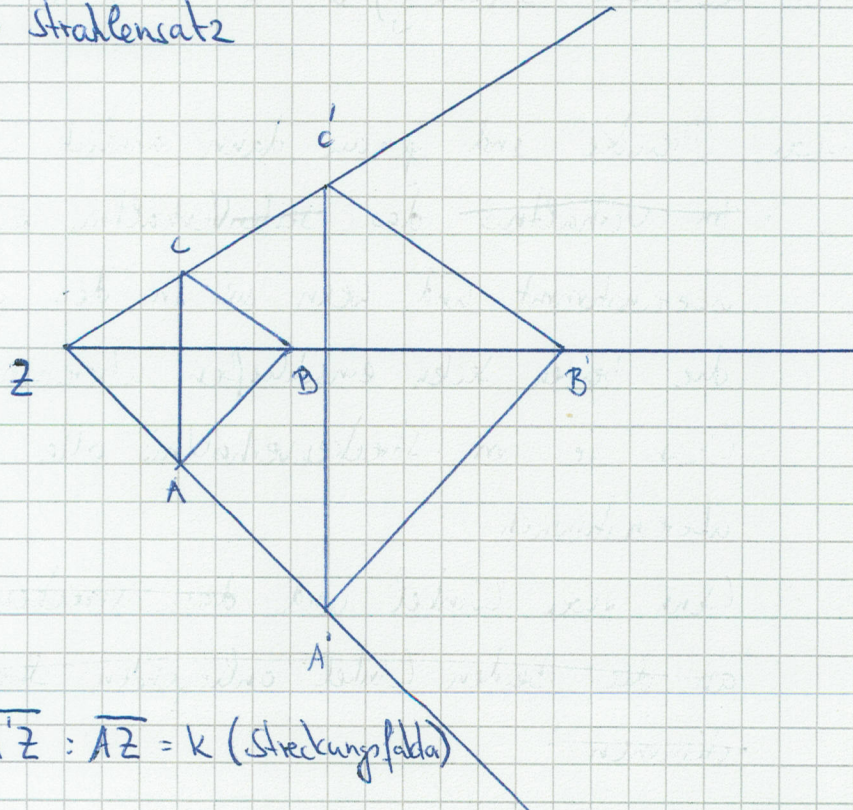
Die Kriterien sind ähnlich zu ~~den~~ den Kongruenzsätzen zweier Dreiecke, aber bei den kongruenten Dreiecken sind die Seiten gleich lang, bei ähnlichen Dreiecken müssen nur die Seitenverhältnisse vom Urbild und Bild-dreieck übereinstimmen.

~~Das Verhältnis~~

Beweis: ~~Alle drei Seiten des Urbetriecks stim~~

Die Seitenverhältnis aller drei Seiten stimmen überein:

→ Strahlensatz



$$\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{A'C'}$$

$$\Rightarrow \overline{A'C'} : \overline{AC} = \overline{A'Z} : \overline{AZ} = k \text{ (Streckungsfaktor)}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$

$$\Rightarrow \overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'Z} : \overline{AZ} = k$$

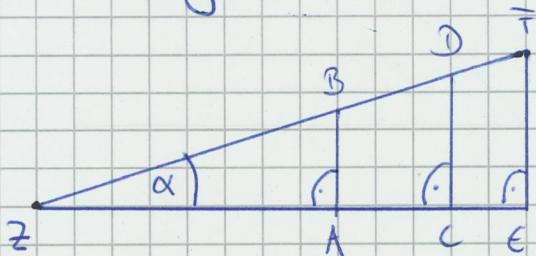
$$\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$$

$$\Rightarrow \overline{B'C'} : \overline{BC} = \overline{B'Z} : \overline{BZ} = k$$

$$\text{Insgesamt gilt: } \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k$$

- 2) Die Strahlensätze werden in 9. Klasse eingeführt. Sie sind wichtig für die Erarbeitung weiterer Inhalte und bieten eine Möglichkeit Sachverhalte zu beweisen.

• Einführung des Sinus



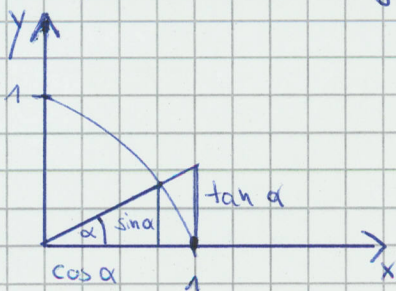
$$\frac{AB}{BZ} = \frac{CD}{DZ} = \frac{EF}{BF}$$

- Schüler erkennen, dass die Seitenverhältnisse von einer bestimmten Größe abhängen, und zwar vom Winkel α .

So wird die Definition

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin \alpha \quad (\text{im rechtwinkligen Dreieck})$$

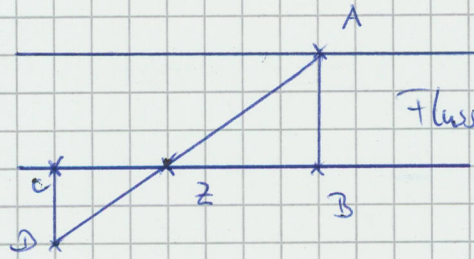
• Definition des Tangens



$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Berechnung von Strecken



beispielsweise kann die Breite eines Flusses berechnet werden, ohne ihn zu überqueren.

Die Schüler müssen an der Problemstellung erkennen, dass ihnen der Strahlensatz hilft:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CZ}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CZ}} \cdot \overline{BZ}$$

- Veranschaulichung der Rechenregel „Minus mal Minus“; allerdings wird dieser Sachverhalt bereits in der 7. Klasse eingeführt, sodass hier nur das Prinzip des Strahlensatzes zur Anwendung kommt; nicht die Schüler kennen den Strahlensatz noch nicht, deshalb wird er auch in diesem Zusammenhang so nicht genannt.

3. Unterrichtseinheit

① Sachanalyse:

Hier kann auf die Teilaufgabe 1 verwiesen werden

② Lernziele

Großziel: Die Schüler sollen ähnliche Dreiecke erkennen können, ihre Eigenschaften kennen und beweisen können, dass jeweils die 3 Seitenverhältnisse übereinstimmen müssen.

- Feinziele:**
- Eigenschaften ähnlicher Δ finden
 - Erkennen, dass Strahlensatz zum Beweis dient
 - Ähnliche Dreiecke aus anderen Dreiecken herausfinden
 - Strahlensatz zum Beweisen ^{an} verwenden können

③ Lernvoraussetzungen

- sicherer Umgang mit dem Strahlensatz
- Kenntnisse ~~der~~ über Kongruenzabbildungen bzw. den Kongruenzsätzen
- Kenntnisse über zentrische Streckung
- Dreiecke zeichnen können und wissen, dass Dreiecke 3 Seiten und 3 Winkel hat (sollte spätestens aus der 5. Klasse bekannt sein)
- Messen von Längen / Winkeln

Didaktische Analyse

Zu Beginn legt der Lehrer eine Folie auf den Overheadprojektor auf, auf der kongruente und ~~nicht kongruente~~ zwei ähnliche Dreiecke zu sehen sind. Die Schüler bekommen die Folie als Arbeitsplatte~~blatt~~ ausgeleilt und erhalten den Auftrag, in Partnerarbeit kongruente Dreiecke zu finden um so die Eigenschaften kongruenter Dreiecke und die Kongruenzsätze zu wiederholen. Partnerarbeit bietet sich hier an, weil dann eventuelle Schwierigkeiten kommuniziert werden können und mit Hilfe des Partners gelöst werden können. Die ähnlichen Dreiecke sind den Schülern bis jetzt noch nicht bekannt. Nach ca. 5 Minuten Arbeitszeit werden die Ergebnisse im Lehrer-Schüler-Gespräch (LSG) gesammelt und der Lehrer zeichnet die Eigenschaften kongruenter Dreiecke ~~in~~ nochmals auf der Folie ein. Die Schüler bekommen nun den Auftrag die restlichen 2 (also ähnlichen) Dreiecke auszuschneiden und wiederum in Partnerarbeit (PA) zu untersuchen, ob diese Dreiecke etwas gemeinsam haben. Die PA eignet sich hier wiederum verschiedene Ideen zu diskutieren. Der Einstieg mit den kongruenten Dreiecken bzw. ~~denn~~ den Kongruenzsätzen sollte ~~für~~ ^{den Blick} Schüler neben der Vertiefung des Stoffes, jetzt in der Bearbeitungsphase

auf die Seiten und Winkel der ähnlichen Dreiecke lenken. Sie erkennen durch übereinander legen, dass die Winkel der beiden Dreiecke gleich groß sind. Durch die einführende Lenkung sollten sie die Idee haben, dass die Seitenlängen auch besondere Eigenschaften haben. Sollte diese nicht so sein, steht der Lehrer beratend zur Seite und gibt Hilfestellungen. Anschließend werden die Ergebnisse gesammelt und im LSG.

~~Es wird~~ Die Schüler haben durch Messen festgestellt, dass die Seitenverhältnisse jeweils gleich sind und dass die Winkel gleich groß sind. ~~Am~~

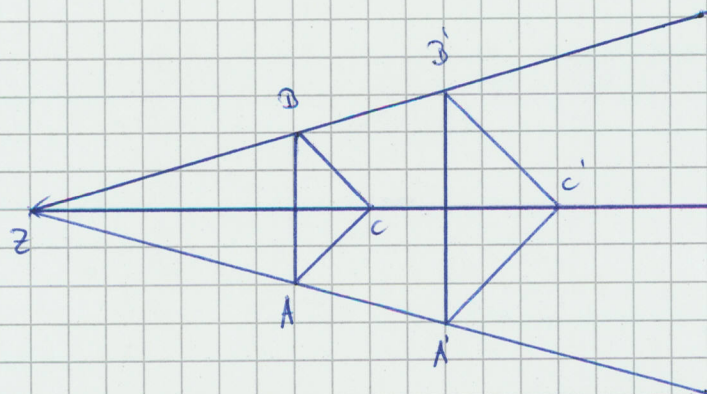
~~Overheadprojektor werden~~ An der Tafel wird der Begriff „Ähnliche Dreiecke“ und die beiden Eigenschaften festgehalten. Die Schüler bekommen nun noch weitere ausgeschnittene ähnliche Dreiecke, um zu überprüfen, ob dies stets gilt.

Die Schüler konnten sich so davon überzeugen, dass in ähnlichen Dreiecken die Seitenverhältnisse der 3 Seiten immer gleich lang sind. Im LSG soll dieser Sachverhalt nun bewiesen werden.

Der Lehrer malt durch zeichnerische Streckung

zwei ähnliche Dreiecke an die Tafel. Dass sie wirklich ähnlich sind, zeigt der Lehrer indem er die Winkel und die Seiten misst. Ein LSG bietet sich hier an, weil die meisten Schüler beim Beweisen noch sehr unsicher sind und mehr verstehen, wenn der Lehrer die Schüler führt.

Tafel:



Die Schüler können nun das Bild eines Strahlensatzes erkennen. Nach kurzer Wiederholung der Strahlensätze kann der Beweis in PA erarbeitet werden. Anschließend werden die Ergebnisse an der Tafel gesammelt und ins Heft übertragen.

Zur Sicherung der Ergebnisse werden den Schülern versch. Dreiecke vorgelegt. Sie sollen entscheiden, welche kongruent, ähnlich oder keins von beiden sind.

Zur Überprüfung der Ergebnisse wird eine Folie aufgelegt. Als Hausaufgabe sollen die Schüler versuchen, weitere Sätze, in Hinblick auf die Kongruenzsätze, für ähnliche Dreiecke finden.

⑤ Verlaufsplan

Phase	Sozialform	Medien
Wiederholung kongruente Dreiecke	PA	Overhead Overheadfolie Arbeitsblatt
Sammeln der Ergebnisse	LSG	Overheadfolie
Erarbeitung: Eigenschaften von ähnlichen Δ finden	PA	ausgeschn. Δ
Sammeln der Ergebnisse I Sicherung an Tafel	LSG	Tafel
Überprüfen an weiteren Δ	PA	Dreiecke aus Papier
Beweis erarbeiten	LSG/PA	Tafel
Sicherung	LSG	Heftentrag
Lernzielkontrolle durch weitere ähnliche Δ finden	PA	Folie/Arbeitsblatt

⑥ Schwierigkeiten

- Sehen Zusammenhang zum Strahlensatz nicht
- Probleme beim Messen u. Verhältnissberechnen
- Lernvoraussetzungen nicht sicher beherrschen