

Aufgabe 1a) Quader:

Ein Quader ist ein Körper, dessen Grundfläche ein (Viereck mit vier rechten Winkeln) ist. Ausgehend von den Ecken des Vierecks befinden sich vier gleiche ^{gerade} lange Strecken, ~~die Kanten~~ welche im rechten Winkel zu den je angrenzenden Seiten des Vierecks stehen. An anderen Ende der Strecken befinden sich durch die Verbindung der Endpunkte ein kongruentes Viereck zur Grundfläche

Sind ~~die Strecken gleich lang~~ alle Kanten des Quaders gleich lang ist der Quader ein Würfel. Ist der Abstand der Vierecke 0, enthält demnach kein Volumen sondern nur Fläche, ist es eine Viereck und kein Körper, damit kein Quader.

Prisma

Ein Prisma ist ein Körper mit der Grundfläche eines Polygons. Die Eckpunkte dieser Grundfläche werden durch gerade Strecken, welche unterschiedlich lang sein können, mit den Eckpunkten eines ähnlichen Polygons verbunden.

Die entstehenden Außenflächen des Prismas zur Polygon mit n Ecken und n Vierecke.

~~Sonderfall, wenn im Prisma die Winkel 90° betragen ist~~

Sind alle Winkel im Prisma rechteckig tritt der Sonderfall eines und das Polygon viereckig, tritt der Sonderfall eines Quaders ein.

Pyramide

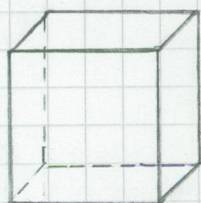
Eine Pyramide ist ein Körper mit einem Polygon als Grundfläche. Die angrenzenden Flächen sind Dreiecke, deren Spitzen sich in der Spitze der Pyramide treffen.

Die Spitze der Pyramide befindet sich auf dem Lot des Mittelpunktes der Grundfläche.

Aufgabe 1

- b) Zur Darstellung, der Körper Quader, Prisma und Pyramide, gibt es verschiedene Möglichkeiten.
Eine Möglichkeit ist die Schrägschizze.

Skizze



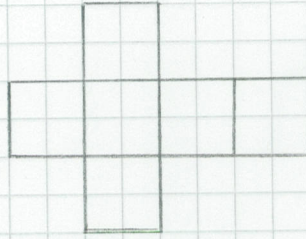
Hierbei wird der Körper abgebildet, die räumlich ~~hinter~~ ~~hinter~~ in den drei Dimensionalen Bereich gehenden Linien schräg dargestellt und nicht sichtbare Kanten gestrichelt dargestellt.

Dieses Modell verlangt den Schülerinnen und Schülern (im Folgenden mit SuS abgekürzt) eine kognitive Leistung ab, da der 45° Winkel imgedenkt werden muss und gestrichelte Linien als etwas erkannt werden müssen, was in Realität aus diesem Blickwinkel nicht sichtbar wäre im Modell jedoch dargestellt wird. Sind diese kognitiven Leistungen erbracht und können umgesetzt werden, bietet dieses Modell

4
den Vorteil, dass schnell Körper dargestellt oder erkannt werden können.

Eine andere Darstellungsform ist der Bauplan.

Skizze



Hierbei werden alle Flächen des Körpers original oder maßstabgetreu dargestellt. Bei diesem Modell können die Eigenschaften der Flächen genau untersucht werden. ~~Prob~~ Jedoch müssen SuS erkennen können um welchen Körper es sich handeln soll. Diese Leistung setzt Erfahrung mit dem „Zusammenbau“ dieser Baupläne voraus und kann für SuS zum Problem werden.

~~kognitiv einfacher~~

Aufgabe 2

Nach Brümmer besteht die Entwicklung aus drei Ebenen, die zum symbolischen Erkennen.

Zuerst bedarf es der Erfahrung mit dem konkreten Objekt, die befinden sich aus auf der enaktiven Ebene.

Danach folgt die ikonische Ebene, in welcher das konkrete Objekt durch Vertreter ersetzt wird. Und die dritte Ebene ist die symbolische, auf der mit Formeln gearbeitet werden kann.

Auf der Erfahrungsebene wird Grundlagenaufbau betrieben. Jeder Schüler und jede Schülerin bringen andere Erfahrungen und Voraussetzungen mit in den Unterricht.

Nach Zedl haben Jungen meist einen Vorteil, da sie bereits Erfahrungen beim praktischen Handarbeiten sammeln konnten.

Auf solche Erfahrungen kann bei Sus aufgebaut werden. Grundlegende Erfahrungen können und müssen als jedoch auch angeboten werden.

Dies kann beispielsweise vom Bauen mit Holzkörpern, zum Anmalen von Pappkörpern bis hin zum Konstruieren anhand von Modellen reichen.

Sind die Begriffe der Körper nun im wahrsten Sinne „begriffen“, also taktil aufgefunden, kann auf der ikonischen Ebene damit weiter gearbeitet werden. Hier können beispielsweise Modellbauten dazu führen, dass SuS erkennen welches Fläche auf glattem Papier zu einem gewünschten Körper führt.

Auf der dritten Ebene können nun Symbole wie das Wort „Würfel“, oder die Schrägskizze eines Körpers, oder aber schon die Volumenformel das Wissen der vorhergegangenen Ebenen aktivieren.

Wichtig ist immer die Verzahnung mit bekanntem Wissen, der Stufenaufbau des Unterrichts aber auch das Zurückkehren auf vorhergehende Ebenen, wenn Unsicherheiten auftreten.

Aufgabe 3

Überblick

Lernziele 2 Seiten weiter

Phase	Inhalt	Unterrichtsziele ①	Sozialform	Medien
I. Motivation	leeres Aquarium als Fragestellung		Lehrer-SuS-Gespräch	Aquarium
II. Hinführung	mögliche Vorgehensweisen ⑤ werden gesammelt + diskutiert		Lehrer-SuS-Gespräch	Tafel
III. Erarbeitung	differenziertes Arbeiten ④ ① ⑥ ③ a) Wassermenge durch Messbecher bestimmen b) Aquarium mit Tetrapachs befüllen c) messen und rechnen		Gruppenarbeit	Messbecher Aquarien Tetrapachs Längenmessgerät Arbeitsblätter
IV. Sicherung	Verstellung Gruppenarbeit ② Tafelausschrieb 3 Wege SuS Abschrift		Vortrag SuS L-SuS Gespräch	Tafel
V. Vertiefung	Praxisbezug ① ② Realität Aquarium			

Vorwissen der SuS

SuS haben in der vorhergehenden Stunde die Formel für die Berechnung des Volumens hergeleitet. Aufgrund einer Teiltüte (Tetrapack) würde der Bezug zur Lebenswirklichkeit hergestellt und die Übereinstimmung von 1l zu 1dm^3 angeführt. Durch die Formel sind die Einheiten cm^3 , dm^3 , m^3 bereits bekannt.

Wie in Aufgabe 2 bereits dargestellt kommen die SuS mit einem unterschiedlichen Erfahrungsstand in die Schule. Die folgende Stunde soll durch differenziertes Arbeiten die passenden Erfahrungen ermöglichen.

Vorwissen konkret

- ~~kooperativ~~
- Volumenformel Quader bekannt
 - Einheiten Volumen bekannt
 - Messen mit Längenmaß und Messbecher werden beherrscht
- ~~effektiv~~
- Gruppenarbeiten wurden bereits durchgeführt
 - Umgang mit Arbeitsblätter und Zusammenfassungen von Beobachtungen mündlich wie schriftlich können erfolgen

Unterrichtsstunden

Aktivitäten

Unterrichtsziele

- ~~kognitiv~~ ① SuS sollen ^{die} Formel für Volumen Quader anwenden.
- ② SuS sollen die Vorteile der Formel erfahren (Zeitaspekt).
- ③ SuS sollen Erfahrungen mit Volumen sammeln und diese ~~mit~~ mit der Formel verbinden.
- ④ SuS sollen in Gruppen zusammen arbeiten.
- ⑤ SuS sollen Lösungsvorschläge zur Fragestellung erstellen und bewerten.
- ⑥ SuS sollen aktiv messen und mit den Größen arbeiten.

Beschreibung Unterrichtsphasen

I Motivation

Ein leeres Aquarium erinnert die SuS einerseits an Fische, Wasser und eine Unterwasserwelt, andererseits wird mit mathematischem Blick sofort der leere Quader erkannt.

Einige SuS werden sich sofort die Frage stellen wieviele Liter Wasser, welches Volumen, der Quader aufnehmen kann. Andere SuS werden über die Fragestellung motiviert, dass die Faustregel besagt: pro Liter Wasser - ein cm Fische

Wieviele Fische dürfen wir in dieses Aquarium setzen, wenn sie 2 cm lang sind?

II Einführung

Einige SuS schätzen die Größe ab und spekulieren. Solche Zahlen können an der Tafel festgehalten werden, um sie am Ende der Stunde zu überprüfen.

Wichtig in dieser Phase ist es verschiedene Herangehensweisen zu sammeln. Gemeinsam werden diese bewertet und aufgeschrieben.

Je nach Sicherheit im Bereich der Mathematik und dem Anwenden von Formeln, sowie

den bisher gesammelten Erfahrungen werden sich die SuS den Wegen zuordnen. Die Lehrkraft kann hier einzelnen Schülerinnen ~~und~~ ^{oder} Schülern auszuweisen oder ihre Meinung zu einem anderen Weg für den Schüler oder die Schülerin äußern.

Sind die Vorgehensweisen klar und die Gruppen zugeteilt gibt es weiter in die Erarbeitungsphase.

Erarbeitung

Die Gruppen verfolgen alle das gleiche Ziel, nämlich herauszufinden wieviel Liter und somit wieviele Fische in das Aquarium passen. Die Wege die zur Antwort führen sind jedoch unterschiedlich und knüpfen auf anderen Ebenen, nach Brünner, an.

Gruppe 1

Hier arbeiten drei SuS zusammen. Bei mehr SuS arbeiten mehrere Gruppen arbeitsgleich.

Diese Gruppe macht elementare Erfahrungen im Bereich Volumen und befindet sich nach Brünner am Anfang auf der enaktiven Ebene.

Ein Schüler oder eine Schülerin schüttet mit einem Messbecher immer einen Liter Wasser in ~~ein~~ ^{das} das Aquarium. Ein anderer

12

Schüler oder eine andere Schülerin protokollieren die Liter der Quader mit einer Strich~~liste~~ Liste. Das dritte Gruppenmitglied macht nach je fünf Liter Wasser einen Strich auf Höhe des Wasserstandes. Dazu würde ein Papierstreifen am Aquarium angebracht. Diese Markierungen sollen ~~den~~ die Änderung der Füllmenge deutlich machen, zudem achtet dieses Gruppenmitglied auch darauf, ob richtig gezählt wird.

Ist das Aquarium voll und 60 Messbecher à 1 Liter im Aquarium, befindet sich auf dem Arbeitsblatt noch die Formel des Volumens des Quaders vorgeedruckt. Die SuS sollen die Seiten messen, in die Formel einsetzen, berechnen und erkennen, dass die Formel auf das gleiche Ergebnis kommt.

Gruppe B

Gruppe B soll schon etwas abstrakter arbeiten und statt der Messbecher mit Wasser, leere Tetrapacks stapeln. SuS greifen auf die Erfahrung der vergangenen Stunde zurück, dass ^{dieser} ~~in einem~~ Tetrapack ein Liter Inhalt ist und dieser somit stellvertretend genutzt werden kann.

Das Aquarium $60\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 25\text{ cm}$ ($l \times b \times h$)
 bietet für 60 Tetrapacks ($5\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$) Platz.
~~Natürlich ist hier~~ Auch diese Gruppe soll ausdiele-
 bend noch die Formel anwenden, um die Erfahrung
 zu machen, dass diese ebenfalls zum Ergebnis
 führt.

Gruppe C

Gruppe C hat als praktische Arbeit das Messen, sonst
 wird alles berechnet.

Da die Rechnung allein weniger Zeit in Anspruch
 nimmt, als Rechnung und Durchführung der
 anderen Gruppen, und um diese Gruppe zu fördern
 sind weitere Aufgaben auf dem Arbeitsblatt vor-
 handen. So sollen nicht nur Maße zur Volumens-
 berechnung führen, sondern auch Überlegungen auf
 anderem Weg erfolgen.

Beispielsweise kann überlegt werden wieviel ~~groß~~
 höher das Aquarium sein müsste um 120 Liter
 zu fassen.

Sicherung

Nach der Gruppenarbeit kommt die ganze Klasse wieder zusammen. Jede Gruppe stellt ihre Vorgehensweise und ihr Ergebnis vor. Der Zeit und Aufwandsaspekt kann hier diskutiert werden.

Alle drei Wege werden an der Tafel von der Lehrkraft festgehalten und von ~~den~~ Sus ins Heft übernommen. Als „Sieger“ mit kürzestem Zeit und Arbeitsaufwand geht der Weg der Formel heraus und ist somit die ideale Vorgehensweise, welche gleich gemeinsam angewendet werden soll.

Vertiefung

Hier wird nun natürlich auch das Ergebnis verglichen, wieviele Fische hineinpassen würden.

Vertiefung

Von der Theorie der 30 2cm langen Fische im Aquarium soll nun der Schritt in die Praxis getan werden. Überlegt wird, dass 2cm Kies auf den Boden gehören 5cm unterhalb des Beckenrandes der Wasserhöchststand ist und dadurch eine neue Aufgabe entsteht, ~~das~~ Diese sollen nun alle Sus mit der Formel lösen.

15
Das Ergebnis gibt der Lehrkraft auch Rückmeldung
welcher Schüler und welche Schülerin nun allein
mit der Formel zurecht kommen und welche noch
nicht.

Massfehler

Massfehler können zu falschen Ergebnissen und damit
negativen Erfahrungen führen. Gegen das bloße Einsetzen
und automatisierte Berechnen spricht allerdings, der
meist fehlende Umweltbezug, welcher wiederum dazu
führt, dass Mathematik zwar theoretisch verstanden
und angewendet wird, in der Praxis aber der Einsatz
nicht erkannt wird. Da ein Ziel des Mathematik-
unterrichts auch das Verstehen der Umwelt ist
bedarf es dieser praktischen Mathematik und der
gründlichen Erfahrungen.

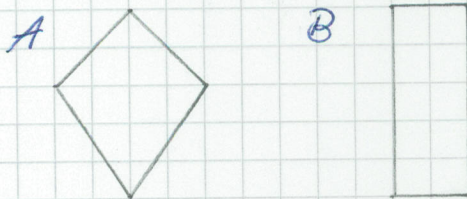
Aufgabe 4

Der Satz von Cavalieri beschreibt zwei Körper, die inhaltsgleich sind, wenn sie mit inhaltsgleichen Grundflächen auf derselben Ebene stehen, oder geskelt werden können und ~~von einer~~ jeder Parallelebene, die sie schneidet inhaltsgleiche Flächen der Körper erzeugt.

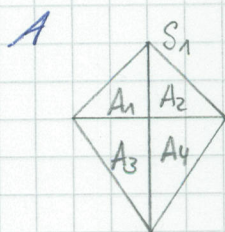
Durch diesen Satz kann das Volumen eines unbekannten Körpers bestimmt werden, wenn sich dieser wie oben beschrieben verhält. Aufbauend auf inhaltsgleiche Flächen kann hier der dreidimensionale Raum ergründet werden.

Beispielskizze

Grundfläche



~~wird Fläche A gespiegelt entsteht Fläche B~~



wird Fläche A geteilt und Teile gedreht
~~entsteht entsteht~~ Fläche B.

A₁ wird an S₁ um 90° gedreht und
A₃ wird an S₂ um 270° gedreht.

Die Flächen A und B sind inhaltsgleich.



Aufgabe 4 Fortsetzung

Sind nun Prismen mit diesen Grundflächen und sind die ^{Längst}Kanten im rechten Winkel zu den Grundflächen, ist nach dem Satz des Cavalieri der Inhalt beider Figuren gleich.

Für die Schülerinnen und Schüler bietet dieser Satz eine Reduktion der zuerst erscheinenden Komplexität beim Inhaltsvergleich zweier unterschiedlicher Körper. Hier kann Etappenweise auf den zweidimensionalen Bereich zurückgegriffen werden und die Aufgabenstellung führt zu dem bereits bekannten Vergleich zweier Flächen.