

KONZEPT

Unterrichtssequenz:

Lernziele:

Grobziel: Der Rauminhalt eines Quaders soll erarbeitet werden

Feinziel: Die Schüler sollen

- die Eigenschaften eines Quaders erarbeiten
- die Formel für das Volumen durch Auslegen von 1 Einheitswürfel ableiten und erarbeiten
- Quader erkennen
- Körpernetze erstellen
- Quader in Umwelt
- Einheiten

Lehrplan:

Im Kernlehrplan der 6. Jahrg. sollen die Schüler anschaulich das Volumen eines W u. Q erarbeiten

Einige Modell eines Quaders

→ Beobachtungen sammeln, aufschreiben, ergänzen

→ Modell beschriften: gleichlange = gleiche
→ Quader in Umwelt Winkel = Farbe

Er. Vorbereitung Oberfläche

Sch. schneiden Quader auf

→ Netz besteht aus 3x2 Rechtecken → O

→ $O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot c \cdot a$

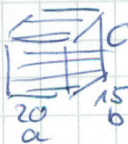
Aufgaben zu O und Netz

Volumen

- Auslegen Einheitswürfel
→ $G = c \cdot b$ $V = G \cdot h$

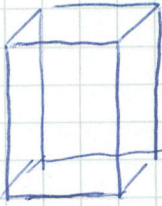
- Einheiten: $l = 1 dm^3$

$$1 cm^3 = 1000 mm^3 = 1 \cdot 10^3 mm^3 = 0,001 dm^3$$



$$= 10^3 dm^3$$

KONZEPT



2) Umschneiden $\rightarrow$ Volumen größer/kleiner

- Figuren: Was davon sind Prismen

- Eigenschaften erarbeiten

- Grundfläche

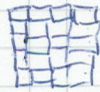
- gerader Körper

- Spitzer Körper

- Einheitsquadrat

- Grundfläche

- Höhe: Schichten



5

5 Reihen mit je 4 ^{Würfel} Quadrate
Höhe 5 Schichten

- Schrägbild zeichnen ⁴ $\rightarrow$ Einheiten

- Körperecke

$$l^2 + r^2 = x^2$$

$$A = r^2 \pi$$

$$A = r^2 \pi - r$$

$$A = x \text{ ~~W~~ }$$

$$r^2 \cdot \pi \rightarrow \pi \cdot r$$

$$r^2 \cdot \pi \cdot h =$$

$$r^2 \pi - x \cdot$$

$$V_x = \frac{A}{3} v_z$$

1a) Quader, Prisma, Pyramide

Quader

Ein Quader wird durch Verschiebung eines Rechtecks im Raum erzeugt, wobei der Verschiebungsvektor senkrecht zur Grundfläche (= Rechteck) verläuft.

Bei einem Quader sind Grund- und Deckfläche 2 Rechtecke.

Die Seitenflächen sind ebenfalls Rechtecke ^{Gegenflächen}. (je zwei sind kongruent)

Der Quader hat 4 gleich lange Raumdiagonalen.

Das Volumen des Quaders wird mit der Formel

$$V = G \cdot h = L \cdot b \cdot h \text{ berechnet}$$

Prisma

Ein Prisma entsteht durch Verschiebung eines geradlinig begrenzten Vielecks im Raum.

Steht der Verschiebungsvektor senkrecht auf dem Vieleck, entsteht ein gerades Prisma.

Bei einem Prisma sind Grund- und Deckfläche 2 kongruente Vielecke. Die Seitenflächen sind Parallelogramme; beim geraden Prisma sind es Rechtecke.

Das Volumen wird mit $V = G \cdot h$ berechnet.

Ist die Grundfläche ein n -Eck, entsteht ein n -seitiges Prisma.

Pyramide

Verbindet man alle Punkte eines ~~gradlinig~~ ~~begrenzten~~ ~~Weges~~ n -Ecks ~~fläche~~ mit einem Punkt S außerhalb der Ebene des n -Ecks mit Strecken, so entsteht eine n -seitige Pyramide.

Steht der Punkt S senkrecht ^{über} ~~auf~~ dem Mittelpunkt des Vielecks nennt man dies eine gerade Pyramide.

Ist die Grundfläche ein regelmäßiges n -Eck ~~so nennt man dies~~ und steht S senkrecht ^{über} ~~auf~~ diesem Mittelpunkt, so nennt man diesen entstehenden Körper eine reguläre Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind Dreiecke, bei einer regulären Pyramide sind es gleichschenkelige Dreiecke.

Das Lot von der Spitze auf die Ebene der Grundfläche (n -Eck) ist die Höhe der Pyramide.

Das Volumen wird mit der Formel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ berechnet.

Die Körper Quader, Prisma und Pyramide können im Geometrie-Unterricht durch plastische Modelle oder Schrägbilder dargestellt werden.

Da Körper 3-dimensional sind, ist es sinnvoll plastische Modelle im Unterricht zu verwenden, da bei Schrägbildern vor allem die Winkel verzerrt dargestellt ~~wird~~ sind und die Schüler so nur schwer die Eigenschaften erarbeiten können.

An plastischen Modellen können sie konkret Winkel und Strecken messen, um so die Eigenschaften des jeweiligen Körpers herauszufinden.

Es gibt unterschiedliche Modelle. Zum einem gibt es speziell für den Geometrie-Unterricht Modelle z.B. Quader mit der Prisma, in das man Pyramiden einbauen kann oder Pyramide mit dem dazugehörigen „Um-Prisma“, ~~wo~~ womit man anschaulich die Volumenformel durch Umschitten herleiten kann.

Wo dies nicht zur Verfügung steht, kann man auch Gegenstände aus der Umwelt zur Veranschaulichung benutzen. Zum Beispiel Schuhkarton für Quader, Toblerone-Schachtel als Prisma, selbstgebastelte Pyramide, ...

Grundsätzlich ist es jedoch immer besser Modelle zu haben, die man miteinander in Verbindung setzen kann.

Weiterhin sollte man auch darauf achten keinen Sandball als Modelle zu wählen und möglichst

2) Schüleraktivitäten und Aufgabenstellungen zur Raumgeometrie

4

Um das räumliche Vorstellungsvermögen zu fördern können beispielsweise die Eigenschaften verschiedener Körper untersucht werden.

~~Welche~~ Welche Figur ^{stellt} ist die Grundfläche ^{das} +?

Gibt es eine Deckfläche oder hat der Körper eine Spitze?

Wie verhält sich die Deckfläche zur Grundfläche?

Um die Oberfläche des Körper ^{ermitteln} zu können Körpernetze erstellt werden. Die Schüler schneiden daraus Körper von ihren Kanten auf und erkennen aus welchen Figuren sich der jeweilige Körper zusammensetzt.

Anschließend kann eine Aufgabe sein Körpernetze für Würfel oder Quader selbst zu zeichnen.

Weiterhin wäre eine Aufgabe aus verschiedenen Netzen solche herauszusuchen die einen Quader ergeben. Dies kann durch ausschneiden und zusammenfalten überprüft werden.

Diese Aufgaben sind besonders gut um den Schülern die räumliche Vorstellungskraft zu fördern, da die Schüler in Gedanken den Würfel bzw. Quader "zusammenbauen" müssen.

Als Hilfestellung kann man bestimmte ^{Eigenschaften} Regeln erarbeiten die die Netze nicht haben dürfen, wenn daraus ein Quader / Würfel entstehen soll z.B. "U" oder 5er Kette.

Man kann natürlich auch von anderen Körpern,

Netze zur Veranschaulichung erstellen, zum Beispiel:

Pyramide: besteht aus Grundfläche und Dreiecken

Zylinder: besteht aus Grundfläche, Deckfläche und Rechteck

Kegel: besteht aus Grundfläche und Kreis Sektor.

Zur Unterscheidung von Körpern kann man Schüler aus verschiedenen Modellen beispielsweise Prismen herausuchen lassen. Dadurch haben sie keinen Sonderfall als mentales Modell, sondern erkennen, ~~das~~ die unterschiedlichen Formen von Prismen. Sie müssen die Eigenschaften eines Prismas, die sie gelernt haben abrufen und die Körper daraufhin untersuchen. Sie müssen ~~es~~ erkennen, dass die Körper nicht immer auf der Grundseite stehen.

Um den Schülern eine Vorstellung von Volumen zu geben können Umschüttversuche gemacht werden.

Dabei kann überprüft werden, welcher Körper größer, welcher kleiner ist und in weiteren Schritten kann auch eine Beziehung zwischen den Körpern hergestellt werden.

Eine Pyramide hat das Volumen einer Pyramide ~~erst~~ dreimal ~~es~~ in ein Prisma, das die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe, wie ~~das~~ die Pyramide hat. Daran kann man die Volumenformel $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$ ableiten.

Um das Volumen eines Quaders oder eines Würfels zu bestimmen, können diese Körper mit Einheitswürfeln ausgelegt werden.

Die Schüler erkennen, dass der Körper aus mehreren "Schichten" besteht. Jede einzelne Schicht besteht aus Reihen mit je einer ^{bestimmten} Anzahl an Würfeln.

Eine Schicht entspricht der Grundfläche woraus nun die Formel $V_G = G \cdot h = l \cdot b \cdot h$ abgeleitet werden kann.

Bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Berechnung des Volumens können die Schüler die Würfel ~~zu~~ abzählen, um das Ergebnis zu überprüfen. ⊕

Eine weitere Aufgabe zur Raumgeometrie könnte sein, ein Schrägbild eines Körpers zu zeichnen.

Ein Beispiel dafür wäre ein reguläres Tetraeder.

Zunächst sollen die Schüler versuchen ^{ein} ~~das~~ Modell dafür abzuzeichnen. Bereits hier müssen sie versuchen einen 3-dimensionalen Körper in eine 2-dimensionale Figur umzuwandeln und dabei Winkel verzerrt darstellen.

Anschließend sollen sie exakt vorgehen, in dem sie bei gegebenem Verkürzungsfaktor und Winkel ~~durch~~ ~~ein~~ ~~die~~ ~~gezeichnete~~ das Tetraeder zeichnen konstruieren.

Eine weitere Möglichkeit das räumliche Vorstellungsvermögen zu fördern ist der Blick in die Umwelt.

Die Schüler sollen anhand der Eigenschaften,

die Sie für die verschiedenen Körper gelernt haben,

Beispiele für Körper in der Umwelt suchen:

Prisma: Haus, Pflastersteine, Bierzelt, Tislerone

Würfel: Würfel, bestimmter Karton

Quader: Hochhaus, Schuhkarton

Kegel: Trinkbecher, Hüthen (beim Sport)

Kugel: Ball

(*)

An dieser Stelle können auch die Einheiten für das Volumen mit dem Erweiterungsfaktor 1000 erarbeitet werden.

$V = l \cdot b \cdot h$. Setzt man nun Größen ein erhält man

$$V = 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} = 135 \text{ cm}^3$$

Bei der Umformung in eine andere Einheit muss man ~~es~~ mit 1000 bzw. 10^3 erweitern

$$135 \text{ cm}^3 = 135\,000 \text{ mm}^3$$

3) Unterrichtssequenz zum Thema „Rauminhalt des Quaders“

3.1 Lernziele

Ziel der Sequenz: Behandlung des Rauminhalts des Quaders

Feinziele: Die Schüler sollen:

- Die Eigenschaften des Quaders erarbeiten
- Quader in der Umwelt suchen
- Das Netz eines Quaders erstellen
- Die Oberfläche eines Quaders bestimmen
- Die Formel ~~für da~~ zur Berechnung des Volumens eines Quaders erarbeiten
- Einheiten für den Rauminhalt erlernen und in die nächste Einheit umwandeln
- ihr räumliches Vorstellungsvermögen schulen

3.2 Lehrplanbezug

Der Quader soll in der 6. Klasse / Übergangsstufe behandelt werden. Die Schüler sollen durch einen anschaulichen Unterricht das Volumen des Quaders bestimmen

3.3 Lernvoraussetzungen

- Fachbegriffe: Volumen, Länge, Breite, Höhe, Rechteck
- Bestimmung des Volumens eines Würfels
- Bestimmung des Flächeninhalts eines Rechtecks durch Verlegen von Einheitsquadraten

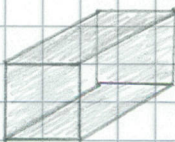
3.4 Verlauf der Sequenz

9

Zu Beginn der Sequenz sollten in der Einführungsstunde die Entstehung und die Eigenschaften eines Quaders erarbeitet werden.

Dies könnte anhand eines Modells geschehen.

Die Schüler schreiben ihre Beobachtungen, die der Lehrer an der Tafel notiert. Diese müssen anschließend überprüft und eventuell ergänzt werden. Nun bekommen je 2 Schüler ein Modell überprüfen die Eigenschaften und beschriften es in Partnerarbeit. Es sollten gleiche Flächen und gleiche Winkel in gleicher Farbe gezeichnet werden und die Strecken beschriftet werden.



Nun sollen die Schüler anhand der gelernten Eigenschaften Beispiele für Quader in der Umwelt finden. (Schrank, Hochhaus, Buch...)

In einer weiteren Stunde kann auf das Quadernetz und die Oberfläche des Quaders eingegangen werden.

Hierzu schneiden die Schüler ein Modell auf und breiten es vor sich aus. Durch dies erkennen sie noch einmal, dass der Quader aus je 2 kongruenten Rechtecken besteht. Die Oberfläche wird also mit $O = 2 \cdot R_1 + 2 \cdot R_2 + 2 \cdot R_3$ berechnet.

Für Sicherheit wird das Netz gut beschriftet ins

Heft geblättert und Aufgaben zur Oberfläche und zu Körpernetzen bearbeitet.

Aufgaben können sein:

- Ein Schrank soll die Maße ~~Höhe~~ Höhe: 2,20 m, Breite: 1,40 m und Tiefe 0,70 m haben. Wieviel Quadratmeter Holz wird benötigt?
- Ein Hochhaus ist 20 m breit und 15 m tief. Die Oberfläche beträgt 2000 m^2 . Wie viele Stockwerke hat es, wenn ein Stockwerk 2,50 m hoch ist?

- Arbeitsblatt mit verschiedenen Körpernetzen:

Welche Netze können zu einem Quader zusammengeklappt werden? Überprüfe dies, indem du die Netze ausschneidest und fältest!

In den nächsten Unterrichtsstunden der Sequenz kann das Volumen des Quaders bestimmt werden.

Die Schüler müssen dabei auf ihr Wissen zur Flächenberechnung des Rechtecks zurückgreifen.

Da haben sie die Fläche mit dem Auslegen von Einheitsquadraten bestimmt.

Beim Quader müssen sie das Volumen durch Auslegen von Einheitswürfeln bestimmen.

Dabei sollen sie erkennen, dass eine Schicht aus Reihen mit je einer bestimmten Anzahl von Würfeln ^{besteht} besteht. Für die Bestimmung des Volumens zählen sie die Würfel ab. Nun sollen sie sich eine „Gleichterungsstrategie“ zur Bestimmung der Würfelanzahl überlegen.

So wird die Volumenformel $V = a \cdot b \cdot c$ (je nach Beschriftung) erarbeitet.

11

Um die Um Einheitswürfelmodell können auch die Einheiten für das Volumen eingeführt werden. Man kann am Modell anschaulich erklären, dass der Umrechnungsfaktor beim Volumen 1000, also 10^3 beträgt.

Zur Übung sollen die Schüler Größen in die nächste Einheit umwandeln.

Weiterhin können auch Aufgaben zur Berechnung des Volumens eines Quaders gestellt werden.

Ein Beispiel dafür wäre:

Wieviel Beton (in cm^3) wird für einen quaderförmigen Sockel mit 0,8 m Breite 0,7 m Tiefe u. 1 m Höhe benötigt?

Zum Abschluss der Sequenz können noch einmal die Eigenschaften, so wie die Methoden zur Berechnung der Oberfläche und Bestimmung des Volumens wiederholt und gefestigt werden.

Weiterhin könnten nun von den Schülern selbst Körperwerke gezeichnet werden. Eine weitere Übung zum räumlichen Vorstellungsvermögen wäre noch das Skizzieren eines Schrägbildes des Quaders.

Dadurch erkennen die Schüler, dass die Winkel nicht originalgetreu, sondern verzerrt dargestellt werden müssen.

Die ~~die~~ Sicherungs- bzw. Wiederholungsstunde

kann in Form eines ~~Stationen~~ Lernzirkels stattfinden. An den verschiedenen Stationen gibt es Aufgaben zum Volumen, zur Oberfläche, zu Körpermaßen und beispielsweise auch zur Umrechnung von Volumeneinheiten.

Die Schüler müssen selbstständig arbeiten und ihr, in den ~~verg~~ vorhergehenden Stunden gelerntes, anwenden.

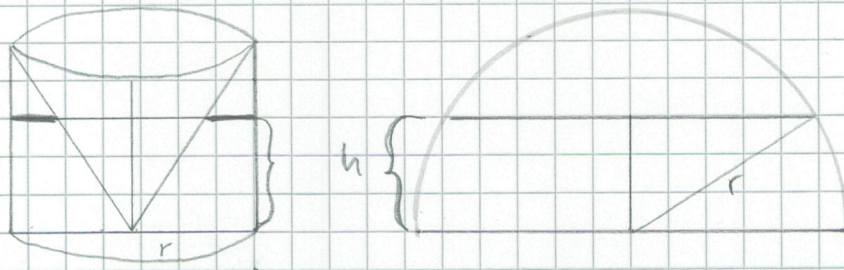
Auch die Verbesserung kann, anhand von Lösungsblättern, selbstständig durch die Schüler geschehen.

Zum Schluss sollte, dann noch darauf eingegangen werden, wo die Schüler Schwierigkeiten hatten und welche Aufgaben ihnen leicht gefallen sind.

4.) Prinzip des Cavalieri

Das Prinzip des Cavalieri besagt, dass Körper gleicher Höhe und gleicher Querschnittsfläche auf gleicher Höhe auch gleiches Volumen haben.

In der Schule kann das beispielsweise zur Volumenberechnung der Kugel angewendet werden.



→ Zylinder mit einbe-
schnittenem Kegel

→ ~~Ha~~ Halbkugel

$$\Rightarrow A_{\text{Kreisseg}} = A_{\text{Kreis}}$$

~~Abz~~

$$\Rightarrow V_{\text{Zylinder mit Kegel}} = V_{\text{Kugel}}$$

$$2 \cdot V_{\text{Zylinder mit Kegel}} = V_{\text{Kugel}}$$

Das Prinzip des Cavalieri kann auch bei schiefen Figuren angewendet werden.

Hat man beispielsweise ein schiefes Prisma und ein orthogonales mit jeweils gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, so ist auch die Querschnittsfläche gleich.

Daraus kann man ableiten, dass auch für das schiefe Prisma

die Volumenformel $V = G \cdot h$ gilt

überprüfen können die Schüler das Prinzip des Cavalieri mit Umschüttversuchen.