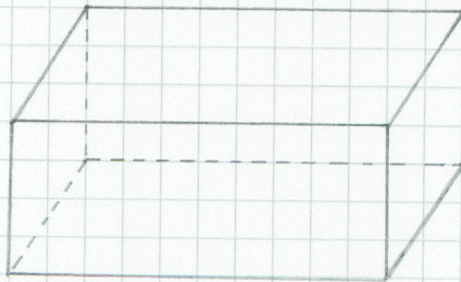


1
1a.) Um die Begriffe Quader, Prisma und Pyramide zu erklären, soll für jeden dieser Körper eine statische und eine dynamische Definition zur Erklärung dienen.

- Quader:

- Ein von sechs Rechtecken begrenzter Körper heisst Quader.
- Verschiebt man ein in einer Ebene liegendes Rechteck senkrecht zu seiner Grundfläche, so entsteht ein Quader.

Beispiele für einen Quader

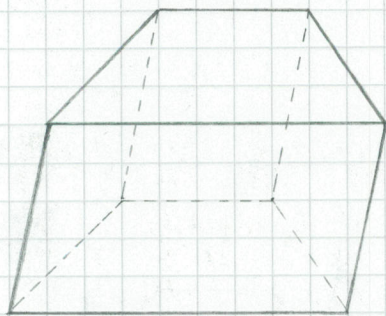


Ein Quader ist ein Körper mit acht rechtwinkligen geometrischen Ecken, zwölf Kanten, wovon je vier Kanten zueinander parallel und gleich lang sind, und sechs Rechtecken, bei denen gegenüberliegende kongruent sind.

- Prisma:

- Ein Prisma ist ein Körper, welcher als Grundfläche ein n -seitiges Vieleck hat, das eine dazu parallel und kongruent liegende Fläche, welche nicht auf der gleichen Ebene liegt, stellt den Deckel dar. Die seitlichen Begrenzungen sind n Parallelogramme.
- Verschiebt man ein n -seitiges Vieleck parallel zu sich selbst, so entsteht ein Prisma.

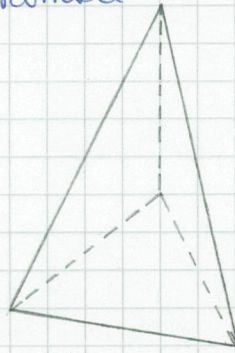
Hat ein Prisma als Grundfläche ein Trapez, so spricht man von einem Trapezprisma:



- Pyramide:

- Ein Körper, der von einem n -seitigen Vieleck als Grundfläche und n -Dreiecken, welche sich mit einer Spitze alle in einem Punkt außerhalb der Grundfläche liegenden Punkt S treffen, heißt Pyramide.
- Verbindet man die Ecken eines n -seitigen Vielecks mit einem Punkt S außerhalb des Vielecks mit Strecken, so entsteht eine Pyramide.

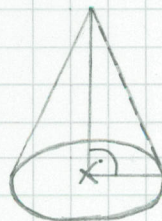
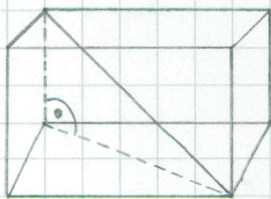
Beispiel für eine Pyramide:



Bei allen drei Beispielen stellen durchgezogene Linien sichtbare, gestrichelte Linien unsichtbare Kanten dar.

1b.) Grundsätzlich müssen den Schülern Körper dargestellt werden, um ihnen ein Bezug zu liefern, dass sie etwas „vor Augen“ haben. Eine klassische und häufig verwendete Methode ist das Darstellen an Hand von Modellen, welche jede ~~Situation~~ Schule zur Verfügung haben sollte. Vorteil von Modellen ist, dass oftmals auch die Raumdiagonalen bzw. wichtige Diagonalen

der Höhen mit eingezeichnet sind. So sind beispielsweise klassische Qualiaufgaben die Berechnung der Raumdiagonalen eines Quaders oder die Berechnung der Höhe eines Kegels. Durch Modellen wird es den Schülern erleichtert, dass sie zum einen eine Vorstellung bekommen, wo solche Diagonalen der Höhen verlaufen, zum anderen werden wichtige Hinweise für die Berechnung (Bsp. rechtwinkliges Dreieck) sichtbar:



Wichtig ist es zudem den Schülern am Hand von Alltagsgegenständen „Körper“ nahe zu bringen. Den Schülern soll bewusst werden, dass sie täglich indirekt hunderte von Körpern registrieren. Schon im Klassenzimmer soll der Auftrag gegeben werden, nach Körpern zu suchen. So werden die Schüler schon hier auf etliche Quader (Bücher, etc.) stoßen. Allerdings werden ~~vermutlich~~ nur wenige Prismen bzw. Pyramiden zu sehen sein. ~~Hier~~ An dieser Stelle sollen die Schüler als Hausaufgabe weitere Körper mitbringen, die gerade behandelt werden. Geht es um die behandelten drei Körper, so werden in der nächsten Stunde etliche Toblerone-Schokoladen, Hüte oder Schuhkartons zu sehen sein. Jeder der Schüler bekommt seine Gegenstände vorstellen und begründen weswegen er sich dafür entschieden hat.

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit sind Schrägbildskizzen.

Diese sollen nicht nur von Lehrern an die Tafel oder auf Folie ~~dargestellt~~ dargestellt werden, sondern auch von den Schülern selbst angefertigt werden. Günstigerweise sollten bei den drei behandelten Körpern in der Schule mit dem vermeintlich leichtesten angefangen werden. Dies dürfte der Quader sein, da er der Klasse am Geläufigsten ist. Am besten führt die Lehrkraft die Skizze, mit Unterstützung eines Modells und konkreten Längeneinheiten, vor an der Tafel oder auf Folie vor. ~~Dies scheint die~~ Anschließend werden die Schüler ebenfalls diesen Quader mit denselben Maßen in ihr Heft konstruieren. Nachteil von Schrägbildskizzen ist die unterschiedliche Ausprägung des Vorstellungsvermögens der einzelnen Schüler.

Eventuelle Zusatzaufgaben für schnelle Schüler müssen angegeben werden, um den „Schwächeren“ entweder selbst zu helfen

oder leistungsstärkere Klassenkameraden zur Verfügung zu stellen.

Alternativ kann zum Beispiel bei ~~der~~ weiteren Körper den Schülern zunächst ein Modell vorgelegt werden, mit dem Auftrag, eigenständig ein Schrägbild anzufertigen. Also zunächst Zurückhalten der Lehrkraft, selbstständiges Ausprobieren der Schüler, dann nochmals Demonstration für alle seitens eines guten Schülers oder des Lehrers.

- 2.) Das räumliche Vorstellungsvermögen ist bei Schülern oftmals sehr unterschiedlich ausgeprägt. Können die einen ohne Probleme einen Pyramidenstumpf aufs Blatt bringen, so fällt es den anderen schwer, sich einen Würfel vorzustellen.

Abhilfe schaffen kann hier sicherlich der Einsatz von Computerprogrammen wie beispielsweise „DynaGeo“. Es hat zuerst den großen Vorteil, dass die Schüler nicht selbst zeichnen müssen und somit ~~die~~ motorische Benachteiligungen verschwinden, womit die Klasse schonmal die gleiche Ausgangsbasis hat. Der Grundstock für das „saubere Arbeiten“ ist somit ~~schon~~ bereits gelegt.

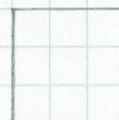
Des Weiteren kann bei diesem Programm ein konstruierter Körper einfach gedreht und damit in Sekundenschnelle aus verschiedenen Sichtweisen betrachtet werden. Eine „einseitige“ Sichtweise ist oftmals der Nachteil an Hefskizzen.

Die dreidimensionale ~~Sichtweise~~ Darstellung aus verschiedenen Perspektiven wird vielen Schülern helfen.

Trotzdem und paradoxerweise auch wieder aus motorischen Gründen, sollen natürlich eigene Skizzen ~~den Schülern~~ die Schüler weiterbringen. Hierbei ist es sinnvoll einen einfachen Körper (Bsp. Würfel) heranzuziehen. Optimalerweise erhält jeder der

Klasse ein Modell. Erste Aufgabe wird es sein, die Kantenlängen zu messen. Darauf wird der Grundstein zum erfolgreichen Schrägbild gelegt: indem die Grundfläche gezeichnet werden soll. Hier dürfen die Schüler selbst ausprobieren und werden bald auf erste Probleme stoßen.

Bsp.: eventuelle Grundflächenzeichnung eines Schülers:



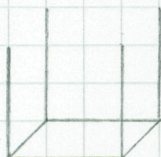
Lässt man den Schüler hier weiter arbeiten so wird ihm sehr bald auffallen, dass es nicht weitergeht. Sollte ein Schüler anschließend gar keine eigene Idee zur Verbesserung haben, so gibt man die Grundfläche selbst vor: Bsp.



Da den Schülern beim Messen aufgefallen ist, dass die Kantenlängen beim Würfel alle gleich lang sind, werden hier die ersten Fragen auftauchen.

Hier vermutlich ~~es~~ scheint es sinnvoll, die Schüler weiterarbeiten zu lassen und das Problem im Nachhinein zu klären.

Weitere Schritte werden nun sein, die vertikale senkrechten Kanten zu zeichnen:



Anschließend ergibt sich ~~die~~ der „Deckel“ von selbst:



Im folgenden Verlauf wird der Schwierigkeitsgrad der Körper erhöht (Würfel $\rightarrow$ Quader $\rightarrow$ Prisma $\rightarrow$ Pyramide $\rightarrow$ Zylinder $\rightarrow$ Kegel) und jeder stets Schritt für Schritt bearbeitet.

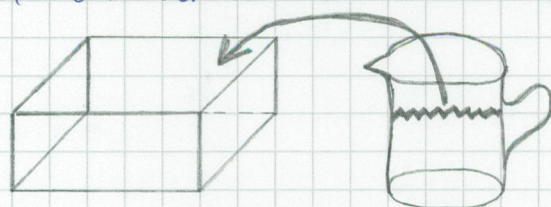
3) Für eine Einführungsstunde zum Thema „Rauminhalt des Quaders“ steht optimalerweise eine Doppelstunde zur Verfügung. Größte der Stunde soll sein, dass die Schüler die Berechnung für den Rauminhalt des Quaders verstehen.

Feinziele sind unter anderem:

- Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Wiederholen bisheriger Flächenformeln, speziell des Rechtecks
- selbständiges Arbeiten
- Anwenden der Volumenformel des Quaders
- ...

Zum Anfang der Doppelstunde steht eine etwa zehnminütige ^{Kopf-}Rechenphase, in welcher beispielsweise verschiedene Flächen wiederholt werden bzw. deren Flächeninhaltsformeln.

Nach dem Einstieg hat der Lehrer ~~eine~~ ein Modell des Quaders, aus Plexiglas, in das genau ein liter Wasser passt und das an einer Stelle offen ist. Des Weiteren hat die Lehrkraft einen weiteren Behälter (Messbecher), in dem sich exakt ein liter Wasser befindet.

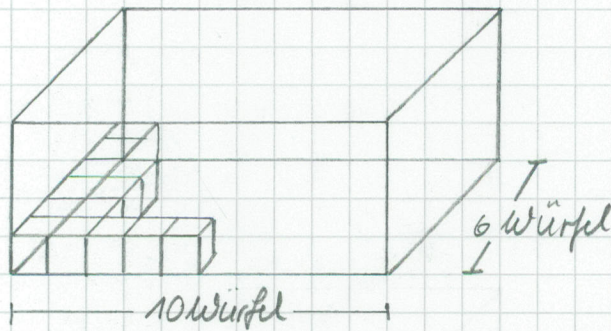


Bevor der Umschüttversuch gestartet wird, soll die Klasse schätzen, ob es zu viel, zu wenig oder genau richtig viel Wasser ist, um den Quader zu füllen.

Nach dem Versuch kann folgt die Hinleitung zum Thema der Stunde, dem Rauminhalt des Quaders.

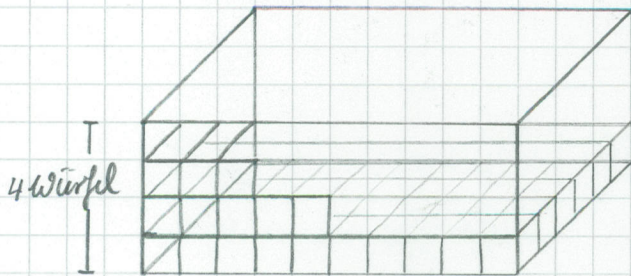
8
Je zwei Schüler bekommen ein Quadermodell mit sogenannten Einheitswürfeln. Als Quadermodell können auch eventuell Dosen oder Schuhkartons verwendet werden. Einheitswürfel sind Würfel, deren Kantenlänge genau 1cm beträgt.

Erster Auftrag an die Klasse wird sein, die Grundfläche mit den Einheitswürfeln zu füllen.



Auf die Frage, wieviele Würfel in die unterste/erste Schicht gepasst haben, werden neben der Würfelanzahl auch Antworten in Bezug auf ~~den~~ die Fläche eines Rechtecks kommen. Somit wird sicher der Zusammenhang hergestellt werden, dass in die erste Schicht exakt $10 \cdot 6$, also 60 Würfel passen.

Nun folgt der entscheidende Schritt zum Rauminhalt. Die Schüler sollen wiederum durch Auslegen mit Einheitswürfeln herausfinden, wie viele dieser Schichten in den Quader passen.



Relativ rasch werden die feststellen, dass in den Quader vier Schichten übereinander passen. Auf die Frage, wieviele Würfel insgesamt im Quader sind, wenden die Schüler schon unbewusst die Volumeninhaltsformel an, da die meisten die 60 Würfel mal 4 Schichten multiplizieren und somit auf ein Ergebnis von 240 Würfeln kommen werden.

Nach dieser enaktiven Schülerphase folgt per Folie eine Wiederholung des durchgeführten „Versuchs“. Der Lehrer zeichnet nochmals einen Quader und die erste Einheits^{Würfel}schicht, um anschließend in einer weiteren Skizze nochmals die Schichten übereinander anzudeuten.

Nach dieser Wiederholung folgt die Herleitung zur Formel für den Rauminhalt des Quaders. Dabei werden nochmals Schritt für Schritt die von den Schülern vorgenommenen Arbeitsabläufe durchgegangen. ~~Es~~ Es wird sich ergeben, dass über die Würfelanzahl der Grundfläche ($a \cdot b$) die Gesamtvolumenformel $V = G \cdot h$ bzw. $V = a \cdot b \cdot h$ an der Tafel steht.

Wichtig für diese Einführungsstunde ist, dass noch keine Einheiten wie cm^3 , dm^3 , etc. genannt werden, sondern zunächst nur von der Würfelanzahl gesprochen wird.

Ist die ikonische Phase und die Herleitung zur Formel beendet, so sollen die Schüler die restliche Stunde weitere Aufgaben aus dem Buch oder einem Arbeitsblatt behandeln. Diese Aufgaben beinhalten verschiedenste Quadergrößen, werden aber immer noch mit dem „Einheitswürfelprinzip“ berechnet.

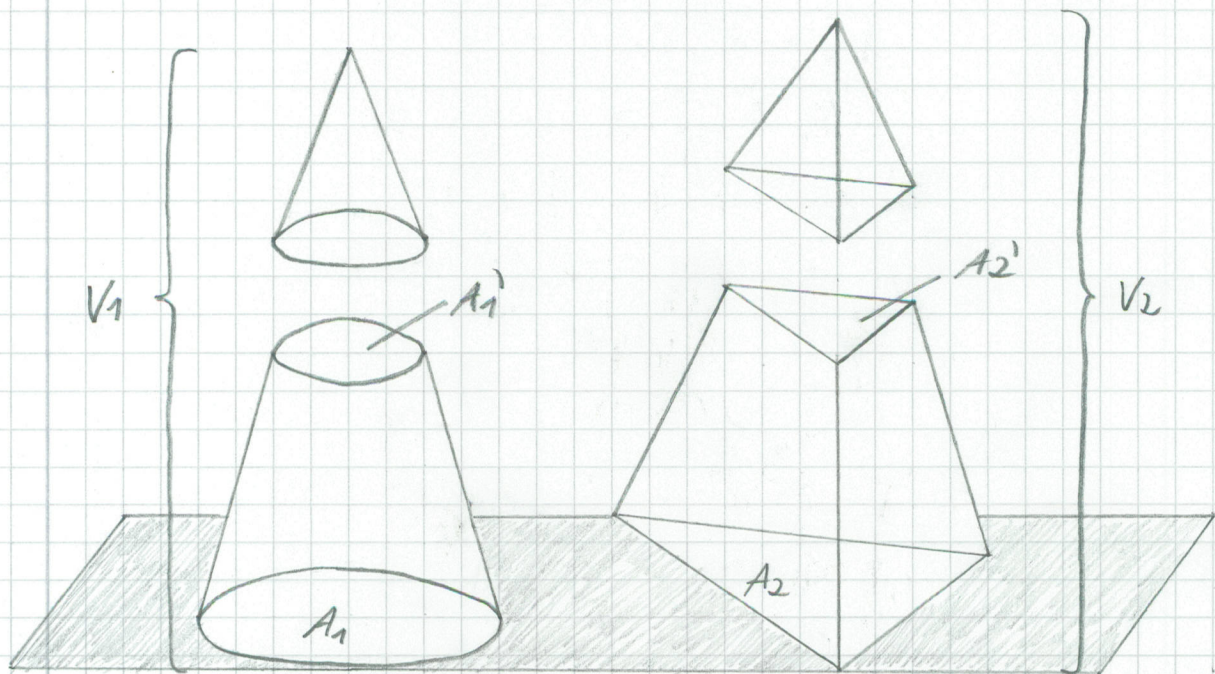
Im dem Folgestunden wird dann die Einheit eingeführt und weitere ~~Rechnungen~~

Nach dieser symbolischen und letzten Phase werden wird die Hausaufgabe erstellt, in der nochmals Aufgaben zu rechnen sind und eventuell auch auf den Würfel anzuwenden sind.

4.) Das „Prinzip von Cavalieri“ lautet:

Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn sie, mit gleich großen Grundflächen auf ein und dieselbe Ebene gestellt, von jeder Parallelebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden.

Beispiel:



$$A_1 = A_2$$

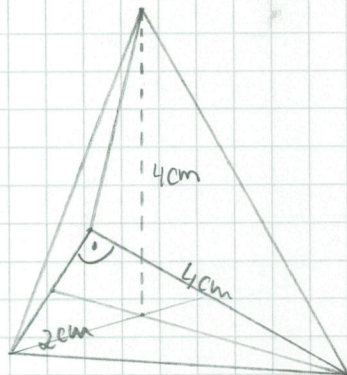
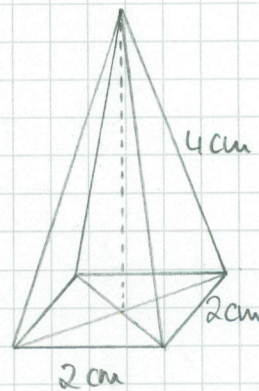
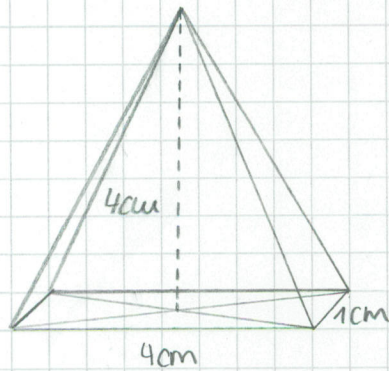
$$A_1' = A_2'$$

$$V_1 = V_2$$

Die Anwendungsmöglichkeiten des „Prinzips von Cavalieri“ im Haupt-
schulunterricht werden sich darauf beschränken, dass den Schülern
bewusst gemacht werden soll, dass Grundfläche und Höhe eine
enorm wichtige Rolle bei der Volumenberechnung spielen. Wenn diese
zudem gleich sind, es sich aber um unterschiedliche Körper handelt,
so stehen diese trotzdem in spezieller Beziehung.

So könnte eine Aufgabe in der 9. Klasse oder auch im Quali
lauten:

Ordne die Körpervolumen der Größe nach!



Der Schnitt durch ~~beide~~ Körper auf einer parallelen Ebene zur Grundfläche wird vermutlich in der Hauptschule nicht spezifisch angesprochen werden.

Die Schüler stellen dann fest, dass ~~da~~ in dem Beispiel die Grundfläche gleich groß ist und bei allen drei Körper die Höhe gleich ist. Spätestens, wenn herausgefunden wird, dass das Volumen aller drei Körper $\leq \frac{1}{3} \text{ cm}^3$ groß ist und diese somit nicht der Größe nach ordnen lassen, werden die Besonderheiten auffallen.