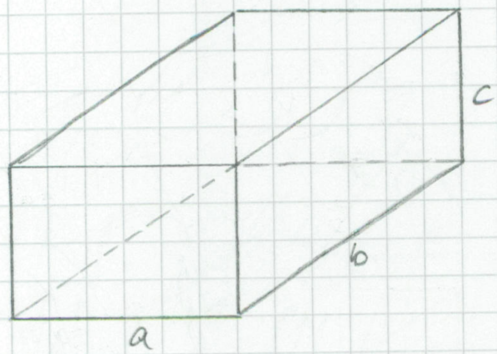
Aufgabe 1

a) Quader

Definition: Einen Körper, der von drei Paar (jeweils zueinander kongruenten) Rechtecken begrenzt wird, nennt man Quader.



Die jeweils gegenüberliegenden Begrenzungsflächen eines Quaders sind Parallel zueinander und gleich groß. Er hat insgesamt vier Seitenflächen und jeweils eine Grund- und Deckfläche.
Die vier Seitenflächen bilden zusammen die ~~Mantelfläch~~ Mantelfläche, von der Oberfläche spricht man bei zusätzlicher Betrachtung der Grund- und Deck~~flächenkanten~~fläche.
Ein Quader besitzt acht Grund- und Deckkanten und vier Seitenkanten. Seine acht räumlichen Ecken besitzen ~~jeweils~~ jeweils rechte Winkel in Bezug auf die angrenzenden Flächen.
Ein Quader hat zusätzlich ~~od~~ 12 Flächendiagonalen, von denen immer jeweils vier

gleich lang sind. Seine vier Raumdiagonalen schneiden sich, sich gegenseitig ~~halb~~ halbierend, in ~~eine~~ einen ~~ge~~ gemeinsamen Punkt, den man als Schwerpunkt bezeichnet. Zu jeder Kante im Quader gibt es drei zu ihr parallele Kanten.

Die Oberfläche des Quaders berechnet man mit der Formel: ~~O = a · b · c / das Produkt aus Höhe, Länge und Breite des Kör~~

$O = 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$

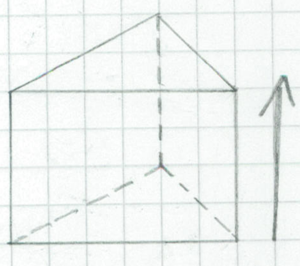
Das Volumen wird mit

Um das Volumen zu bestimmen bildet man das Produkt aus Länge, Breite und Höhe des Quaders:

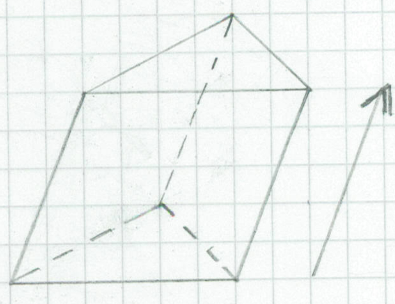
$V = a \cdot b \cdot c$

Prisma

Definition: Einen Körper der von zwei kongruenten und in parallelen Ebenen liegenden n-Ecken und n zueinander kongruenten Parallelogrammen begrenzt wird, nennt man ~~ein~~ n-Eck-Prisma



gerades Dreiecksprisma



schiefes Dreiecksprisma

Ein Prisma kann man durch Parallelverschiebung eines n-Ecks im Raum erzeugen. Steht der Verschiebungs~~faktor~~vektor senkrecht auf der n-Ecks-Ebene spricht man von einem geraden Prisma, in allen anderen Fällen nennt man den entstehenden Körper schiefes Prisma (Vgl. Zeichnung). Besitzt ein Prisma ein regelmäßiges n-Eck als Grund- und Deckfläche, spricht man von einem regelmäßigen Prisma.

Der bereits vorgestellte Quader stellt stellt eine Sonderform des Prismas dar, da bei ihm alle Flächen ~~aus~~ Rechtecke~~n~~ ~~be~~ sind.

Weitere besondere Prismen sind der Würfel und das Parallelflach. Der Würfel wird von ~~sch~~ sechs Quadraten ~~begrenzt~~ begrenzt und das Parallelflach (auch Spat) von sechs Parallelogrammen.

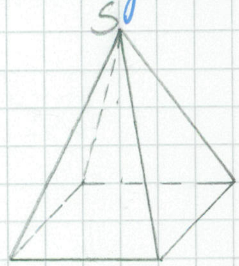
Auch beim Prisma nennt man die Vereinigungsmenge der Seitenflächen Mantelfläche und bei zusätzlicher Betrachtung der ~~Gru~~ Grund- und Deckflächen spricht man von ~~Oberf~~ der Oberfläche: Ein n-Ecks-Prisma hat $2 \cdot n$ Ecken und $3 \cdot n$ Kanten.

~~Die Ober~~ Die Oberfläche wird aus der Summe ~~der~~ des Flächeninhalts von Grund- und Deckfläche sowie der Mantelfläche berechnet.

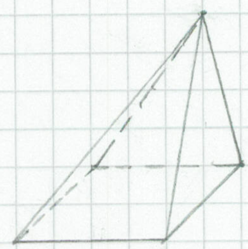
Das Volumen ergibt sich aus dem Produkt der Grundfläche mit der Höhe des Prismas.

<u>Pyramide</u>

Definition: Verbindet man ~~den~~ die Eckpunkte eines ebenen n-Ecks mit einem nicht in der Ebene der n-Ecks des n-Ecks liegenden Punkt, nennt man den durch die entstehenden Dreiecke und das n-Eck ~~ab~~ eingeschlossenen Körper Pyramide.



gerade Pyramide



schiefe Pyramide

Fällt man das Lot von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche und schneidet diese Gerade die Grundfläche in ihrem Mittelpunkt, dann nennt man die Pyramide gerade. Schneidet das Lot ~~g~~ die Grundfläche nicht im Mittelpunkt spricht man von einer schiefen Pyramide.

Die Länge ~~des Streckenabschn~~ der Strecke von der Spitze der Pyramide zum Schnittpunkt von Lot und ~~n-Ecks~~ Grundflächenebene nennt man Höhe ~~des Drei~~ der

Pyramide. ~~Die~~ Senkrechte auf einer Seitenkante Grundkante durch die Spitze, nennt man die durch die Schnittpunkte entstehende Strecke Seiten~~fl~~höhe

Der ~~Der Oberflächen~~ Oberflächeninhalt des Pyramide wird aus der Summe der Inhalte der Dreiecksflächen und der Grundfläche gebildet.

~~Das Volumen (Rauminhalt) wird aus aus dem Produkt von~~

Das Volumen berechnet man mit der Formel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ wobei G für den Flächeninhalt der Grundfläche und h für die Höhe der Pyramide steht.

b) Für die Schüler ist die Betrachtung von Modellen ~~geme~~ geometrischer Körper in den meisten Fällen leichter, als die Interpretation zweidimensionaler Darstellungen. Vollmodelle also komplett ausgefüllte Modelle sind ~~ka~~ für die Schüler Modelle mit denen sie leicht umgehen können, den ähneln in ihrer Erscheinungsform den geometrischen Körpern, denen sie im Alltag begegnen am ehesten. Anhand dieser Modelle können die Schüler Vorstellungen über die Größenverhältnisse der Seitenflächen und deren Lage zueinander gewinnen. Herstellen lassen sich solche Modelle leicht aus Holz, Knete, Schaumstoff oder ähnlichen Materialien.

Um ~~ein~~ die Vorstellung vom Volumen der Körper ~~zu~~ erweitern eignen sich sogenannte Füllmodelle. Durch aktives Befüllen der Modelle mit Flüssigkeiten oder durch auslegen ~~im~~ mit Einheitswürfeln und den damit einhergehenden Vergleich der ~~Raum~~ Rauminhalt verschiedener Körper, können Schüler unterschiedlichen Körpern ableiten. Bei der sich sogar die Volumenformel ~~bzw.~~ beispielsweise für den ~~Würfel~~ Quader, selbst leicht aus ~~Zahl~~ Zahnstochern und Knete herstellen kann eignen sich hervorragen zur Betrachtung der Seiten und Kanten des Körpers. Dadurch, dass die Köper „offen" sind, kann man in ihnen auch ~~Di~~ Raumdiagonalen oder Schnittflächen darstellen und die Schüler so an ein räumliches Vorstellungsvermögen heranführte.

Interessant sind auch Modelle, bei denen die Grundfläche und die Deckfläche (bzw. die Spitze) aus festen Material bestehen und

die Seitenkanten durch ~~varia~~ in der Länge variable Schnüre oder Gummis dargestellt werden. Durch diese Vorrichtung ist ein solches Modell veränderbar und kann Schülern aufzeichnen, welche ~~Veränderungs~~ Auswirkungen die Veränderung einzelner Variablen auf den Körper hat.
Eine weitere Möglichkeit Körper zu betrachten, bieten Schrägbilder. Das Zeichnen von Quadern als Schrägbild stellt ~~für Schüler der~~ gerade für jüngere Schüler noch ein Problem dar und kann durch die Hinzunahme von Kantenmodellen erleichtert werden. Die Darstellung von n-Ecks-Prismen ist ~~in~~ in ~~noch~~ manchen Fällen noch anspruchsvoller und für das Zeichnen des Schrägbildes einer Pyramide ~~sold~~ sollten die Schüler schon Übung ~~bei~~ beim Umgang mit Schrägbildern haben.

Eine weitere Möglichkeit Körper wie die Pyramide, den Quader und das Prisma darzustellen bieten Körpernetze. Auch der Umgang mit solchen Abbildungen sollte erst geübt werden. Für diese Übung eignen sich einfache Körper wie der Würfel und der Quader bevor, man ~~zu~~ zu Körpernetzen von Prismen und Pyramiden übergeht.

Aufgabe 2

Um ~~die~~ das Vorstellungsvermögen von Schülern im Raum zu trainieren, ~~E~~ eignet sich neben der bereits beschriebenen Arbeit mit Modellen und Schrägbildern der Umgang mit Zwei-Tafel-Projektionen ~~oder~~ oder Drei-Tafel-Projektionen. Eine mögliche Aufgabenstellung wäre die Umsetzung eines solchen Zwei-Tafel-Bildes ~~in~~ in ein Schrägbild oder die Beschreibung des Körpers.
~~Auch Der~~
Auch der Umgang mit bereits angesprochenen Körpernetzen kann das räumliche Vorstellungsvermögen schulen. Hier sind die Möglichkeiten ebenfalls vielseitig. Aufgabenstellungen wären beispielsweise ob sich verschiedene abgebildete Körpernetze auch ~~zu~~ zu dem gewünschten Körper falten lassen oder nicht.
Auch könnten Körpernetze in Kombinationen mit Schrägbildern dargeboten werden, in denen ~~einzelne~~ einzelne Flächen oder Bereiche eingefärbt sind, mit der Aufgabenstellung zu entscheiden, welches der Netze welchen ~~Kör~~ Körper darstellt.
Eine weitere Möglichkeit wäre ~~ein~~ einen Schüler einen Körper zeichnen zu lassen. ~~Evtl~~ (eventuell kann man ihm auch ein Modell ~~zur~~ zur Verfügung stellen). Dieser soll seinen Körper dann seinem Partner oder der gesamten Klasse ~~zeigen~~ so beschreiben, dass

diese um ihrerseits eine Zeichnung dieses Körpers anfertigen können. Selbstverständlich ~~ist~~ wird schon durch die Vorübung des einfachen Zeichnens eines Modells als Schrägbild das Vorstellungsvermögen der Schüler geschult.
Eine weitere Möglichkeit stellen Schnitte dar. Aufgabenstellungen ~~oder~~ wären in der Form, welche Schnittfläche ~~s~~ entsteht, wenn man einen Quader ~~statt~~ parallel zu ~~de~~ seiner Grundfläche mit einer Ebene schneidet ?" denkbar. Um solche Übungen durchführen zu können, sollte das Vorstellungsvermögen der Schüler allerdings schon vorgeschritten sein.
Auch das Benennen geometrischer Körper, die einem im Alltag begegnen, kann die räumliche Vorstellung von Körpern ~~und~~ ~~v~~ unterstützen.
Bei 9-Klassen, denen der Umgang mit der Satzgruppe des Pythagoras vertraut ist kann man auch Schätzübungen, beispielsweise das Berechnen der Raumdiagonalen des Klassenzimmers, durchführen lassen.
Schätzübungen könnten ebenfalls bei den bereits angesprochenen Füllmodellen durchgeführt werden. „Wie oft passt der Rauminhalt von der Pyramide ~~?" waren wäre eine mögliche Fragestell~~ in diesem Würfel ?" Wäre eine mögliche Fragestellung. zur Überprüfung der Hypothesen.

Seite versehentlich freigelassen

-> weiter auf Seite 11

die Modelle mit Flüssigkeit befüllen.
Solche Übungen zur räumlichen Vorstellung sind für Schüler hilfreich, in Bezug auf den weiteren Umgang mit Körpern wärend ihrer Schullaufbahn. Aber auch im Alltag können ~~sie solch~~ sie ~~solch~~ immer wieder auf dadurch gewonne Fähigkeiten zurückgreifen, zum Beispiel beim Renovieren und Einrichten einer Wohnung. Deshalb sollten solche Übungen Bestandteil von Geometriestunden sein und so beispielsweise als kurzer Beginn ~~zu~~ zu jeder Stunde durchgeführt werden.

Aufgabe 3

Unterrichtssequenz zum Thema „Rauminhalt des Quaders"
Lehrplanbezug: - 6. Klasse
- Oberfläche und Volumen von Würfeln und Quadern.

Sachanalyse: Das Volumen des Quaders dessen Eigenschaften bereits in Aufgabe 1 näher ausgeführt wurden wird aus dem Produkt aus ~~der Län~~ seiner Länge, Breite und Höhe gebildet.
Lernvoraussetzungen:

Die Schüler können zu diesem Zeitpunkt schon mit dem Begriff des Quaders umgehen und ihn von anderen Körpern und deren Eigenschaften unterscheiden, beziehungsweise intuitiv in ~~Bez~~ Beziehung setzen. Auch die Begriffe der geometrischen Flächen des Quadrats und des Rechtecks sind ihnen bereits geläufig. Sie können deren Umfang und Flächeninhalt berechnen und somit auch die Berechnung der Oberfläche des Quaders bereits herleiten (auch Stoff der 6. Klasse). Durch ~~das~~ die bereits durchgenommene Berechnung des Volumens eines Würfels, ist ihnen der Umgang mit Einheitswürfeln bereits vertraut.

didaktische Überlegungen:

Die Berechnung des Volumens von Quadern spielt für die Schüler im Wesentlichen für ihre weitere Schullaufbahn eine Rolle. Zur Berechnung von Rauminhalte verschiedener Körper können diese in Teilkörper wie zum Beispiel einen Quader zerlegt werden, womit auf die in dieser Sequenz ~~zug zurückgegriffen~~ erlernte Volumenformel zurückgegriffen werden kann.
Allerdings können diese Fähigkeiten auch im Alltag von Bedeutung sein. Die Berechnung der benötigten Wassermenge zum Befüllen eines Aquariums sei nur eines der ~~d~~ möglichen

Beispiele, die an dieser Stelle genannt werden können.

Lernziele:

Grobziel: Die Schüler sollen den Rauminhalt eines Quaders berechnen können.

Feinziele:

Die Schüler sollen ...

- mit den Begriffen Höhe, Länge und Breite eines Quaders umgehen und diese in einem Modell oder aus einer Zeichnung benennen können.
- bei gegebenen Volumen und zwei weiteren ~~gegebenen~~ Aufgaben (Bsp. Länge und Breite) die dritte Variable (Bsp. Höhe) berechnen können.
- die Volumenformel zur Berechnung des Rauminhaltes eines Quaders auch auf Probleme die im Alltag entstehen, ~~können~~ anwenden können.
- sollen den Umgang mit Füllmodellen ~~[illegible]~~ weiter trainieren, indem sie die Techniken des Befüllens mit Flüssigkeiten und Einheitswürfeln, zum Vergleich der Rauminhalte anwenden können.

Planung der Unterrichtssequenz

Einführungsstunde: 1 UE

In der Einführungsstunde werden die Schüler mit den Modellen von einem Würfel und einem Quader konfrontiert. Die Problemstellung könnte lauten: „Welcher der beiden Körper hat den größten Rauminhalt.
Die Berechnung des Volumens des Würfels ist den Schülern bereits bekannt. Um das Volumen des Würfels mit dem des Quaders zu vergleichen und es zu bestimmen, können die Schüler auf ihnen bereits bekannte Methoden wie dem Befüllen ~~des~~ der Modelle mit Wasser und Auslegen mit Einheitswürfeln zurückgreifen.
Dies sollen die Schüler selbstständig in Gruppen ausprobieren. Je nachdem wie viele Modelle vorhanden sind muss eventuell darauf zurückgegriffen werden, dass einzelne Schüler diese ~~Tät~~ Tätigkeiten vor der Klasse ausführen. Neben der Feststellung, dass Würfel und Quader bestimmter Größe das gleiche Volumen haben können, werden die Schüler durch das Auslegen mit Einheitswürfeln auf die Formel für die Berechnung des Volumens des Quaders gestoßen: ~~V = a · b · c~~ V = Anzahl der Einheitswürfel der Länge multipliziert mit

~~Dann~~ der Anzahl der Breite und der Höhe.

$V = a \cdot b \cdot c$

Je nachdem wie schnell dies geschieht (abhängig davon ob in Gruppenarbeit oder nicht) können noch leichtere Aufgaben zur Übung durchgeführt werden.

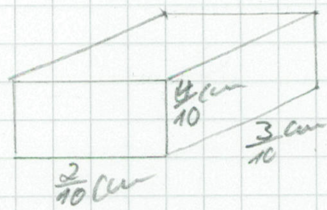
~~[illegible]~~

Vertiefung 1 UE

Diese Stunde soll den Schülern verdeutlichen, dass die ~~Formel~~ von ihnen entwickelte Formel zur Volumenberechnung nicht nur dann gilt, ~~wenn die Aufgaben aus in ganzen cm angeb. für gen Einheitslängen bestehen, sondern allgemein gelten~~ wenn die Längen in „ganzen" cm angegeben sind, sondern allgemein gilt.

Mögliche Rechnung

$e = \frac{1}{10}$ cm



~~$3e \cdot 4e = 12e$~~

$2e \cdot 3e \cdot 4e = 24^e$

$\frac{2}{10}\,cm \cdot \frac{3}{10}\,cm \cdot \frac{4}{10}\,cm = \frac{24}{10}\,cm^3 = 2\frac{4}{10}\,cm^2$

Vor dieser Berechnung könnten ~~noch~~ einfache Übungen zum Abzählen der Einheitswürfel durchgeführt werden.

operatives Üben: 1. UE

In dieser Unterrichtseinheit sollten einfache Aufgaben berechnet werden. Hierzu könnten einfache Aufgaben ~~und von~~ gestellt werden, die das Abzählen ~~und~~ von Einheitswürfeln ermöglichen, ~~und~~ um daraus mit Hilfe der Formel das Volumen zu berechnen. Auch das Zerlegen von Körpern in Quader und das Berechnen deren Volumen könnte an dieser Stelle schon mit der Abzählmethode erfolgen.
Gegen Ende der Unterrichtseinheit sollten schon Aufgaben des Typs: „Ein ~~langer~~ Quader hat eine Länge von 4 cm, eine Breite von 10 cm und eine Höhe von 5 cm. ~~Wie~~ Wie groß ist sein Rauminhalt?" stehen ohne Skizze des Quaders.

mechanisches Üben 1. UE

In dieser Unterrichtseinheit soll der Umgang mit der Volumenformel für den Quader ~~und~~ automatisiert werden. ~~und auch~~ Jetzt sollen die Schüler auch Aufgaben lösen können wie z.B. die Berechnung der Höhe bei gegebener Länge, Breite und Volumen.
Als Form für solche Aufgaben könnten Tabellen dienen, in denen einzelne Aufgaben

wider mit ~~aufgefuttert~~ aufgefüllt sind

Bsp

Länge	Breite	Höhe	Volumen
2cm	3cm	5cm	?
?	5cm	6cm	$120 cm^3$
6cm	?	7cm	$84 cm^3$
3cm	8cm	?	$216 cm^3$

Anwendung 1UE

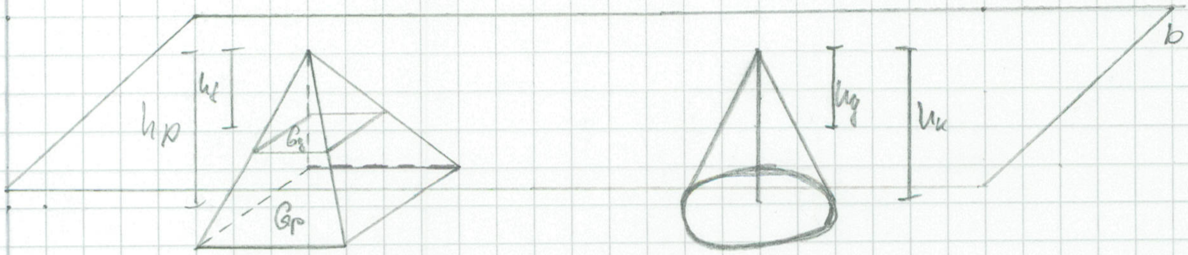
Hier in dieser Stunde sollen Sachaufgaben gerechnet werden, in denen die Schüler ~~beispiels~~ auf die Volumenberechnung eines Quaders zurückgreifen müssen um Problemstellungen zu lösen, die in dieser Form im Alltag auftreten könnten.

Bsp.

Herr Meier kann mit seinem Gartenschlauch ~~in~~ in der Minute ... Liter in ein Becken füllen. Wie lange braucht er um seinen Swimmingpool mit den Maßen ... Länge, ... Breite und ... Höhe mit Wasser zu befüllen.

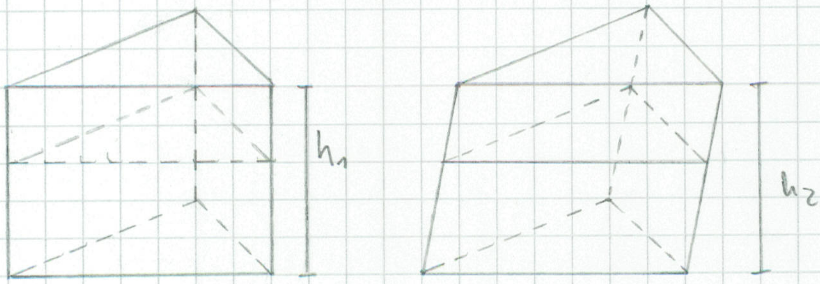
Aufgabe 4

Satz von Cavallieri: Zwei Körper haben den gleichen Rauminhalt, wenn sie mit gleich großen Grundflächen auf ein und dieselbe Ebene gestellt, von jeder Parallelebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten werden.



Das bedeutet, wenn zwei Körper für die gilt $G_p = G_k$ und $h_p = h_k$ ~~zu einer~~ durch eine Ebene b (parallel zur Ebene in der die beiden Grundflächen liegen) so geschnitten werden, daß $G_p' = G_k'$, dann sind die beiden Körper volumengleich.

In der Hauptschule findet dieses Prinzip beispielsweise Anwendung um zu zeigen, das ein schiefes Prisma das gleiche gleiche Volumen hat wie ein gerades Prisma, wenn die beiden, die gleiche Höhe und die gleiche Grundfläche besitzen.

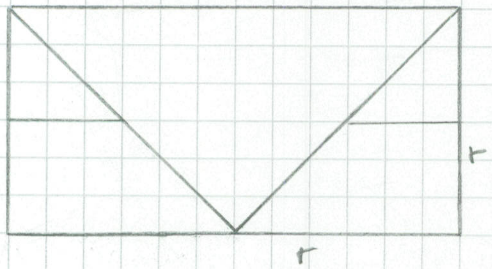


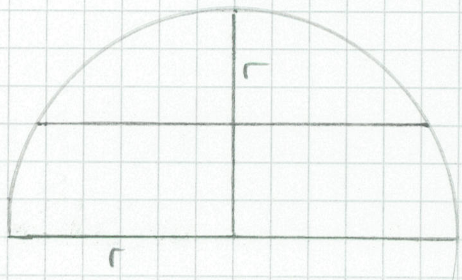
Auch für andere Körper Zylinder, Pyramide, ~~Kegel~~ ~~Stück~~ und Kegel wird dieses Prinzip verwendet, ~~das~~ um zu zeigen, dass der schiefe Körper ~~den~~ das gleiche Volumen hat, wie der gerade Körper, insofern er die gleiche Grundfläche und die gleiche Länge der Höhe besitzt. Auf Grund dieser Tatsache lässt sich ableiten, dass sich die Formel $V = G \cdot h$ ~~sich ableiten~~ bzw. $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ (bei Pyramide und Kegel), die für den geraden Körper gilt auch bei den schiefen Körpern anwenden lässt.

Weiterhin lässt sich das ~~Prisma~~ Prinzip von Cavalieri auch dafür verwenden, ~~das~~ die Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel herzuleiten. Auch wenn diese nicht Bestandteil des Lehrplans bis zur 9. Klasse ist, könnte dieses Thema bei Interesse eventuell in der 9. Klasse bei der Besprechung der Volumenberechnung eines Kegels mit aufgegriffen werden. Auf die genaue Technik des Verfahrens soll an dieser Stelle nicht genau eingegangen werden.

Man zeigt, dass die Schnittflächen eines Zylinders mit der Höhe r und der Grundfläche $r^2\pi$ aus dem ein Kegel mit der Grundfläche $r^2\pi$ und der Höhe r ~~gleich groß~~ ausgeschnitten wird.

und einer Halbkugel mit Radius r gleich groß sind (Vgl. Zeichnung)





Durch ~~B~~ beweisen der gleichen Größe der Schnittflächeninhalte, lässt sich Volumengleichheit beweisen und somit die Formel zur Berechnung des Kugelvolumens herleiten

$$V = \frac{4}{3} r^2 \cdot \pi$$