

1. Zahlen sind Werte, die die Wirklichkeit wiedergeben sollen.
 Mit Hilfe von Zahlen lässt sich Ordnung in Mengen bringen.
 Daher werden Zahlen auch in verschiedenen Mengen beschrieben.
 Diese Zahlenmengen werden in ihrer Komplexität beschrieben
 geordnet, d.h. in aufsteigender Komplexität.
 Die grundlegenden und positiv ganzen Zahlen werden als natürliche
 Zahlen wiedergegeben. $\Rightarrow \mathbb{N}$. Ihre Menge umfasst alle positiven Zahlen,
 die weder gebrochen sind, noch negativ vorkommen.

Darauf folgen die ganzen Zahlen, die in
 ihrer Menge alle positiven Zahlen, aber
 aber auch ihre (negativen) Gegenstücke und 0-Null
 einschließen.

Im Unterricht können sie gut anhand von
 Temperatur oder schulden und Guthaben
 veranschaulicht werden, bzw. anhand von
 Zahlenstrahlen, die die Einführung von Gleichungen
 mit negativen Zahlen, Werten besser
 darstellen. Bsp.

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ rationale
Zahlen

$\mathbb{R}$ reelle
Zahlen

irrationale
Zahlen

a) $3x + 2 = 7$ oder b) $3x - 2 = 7$

$$3x = 7 - 2$$

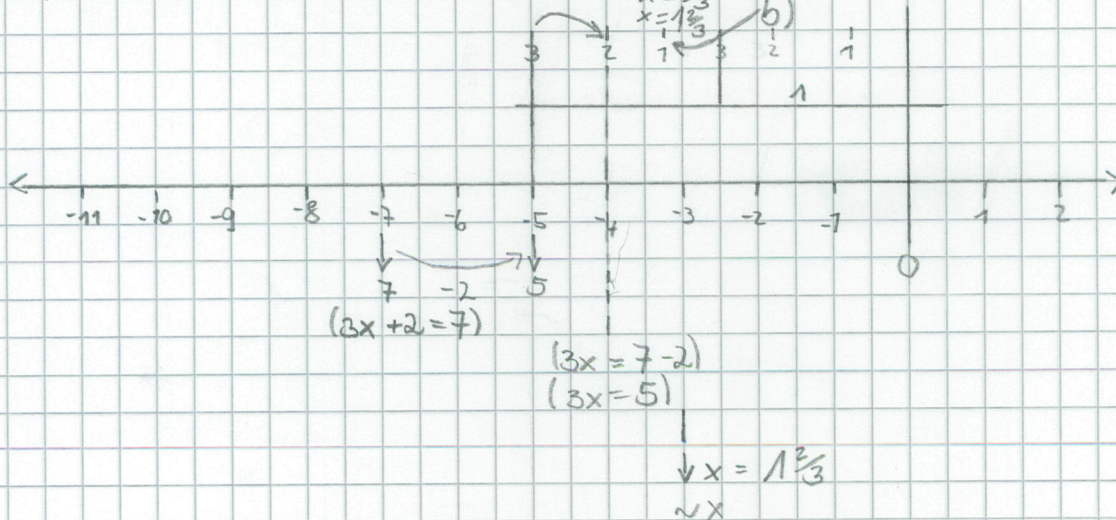
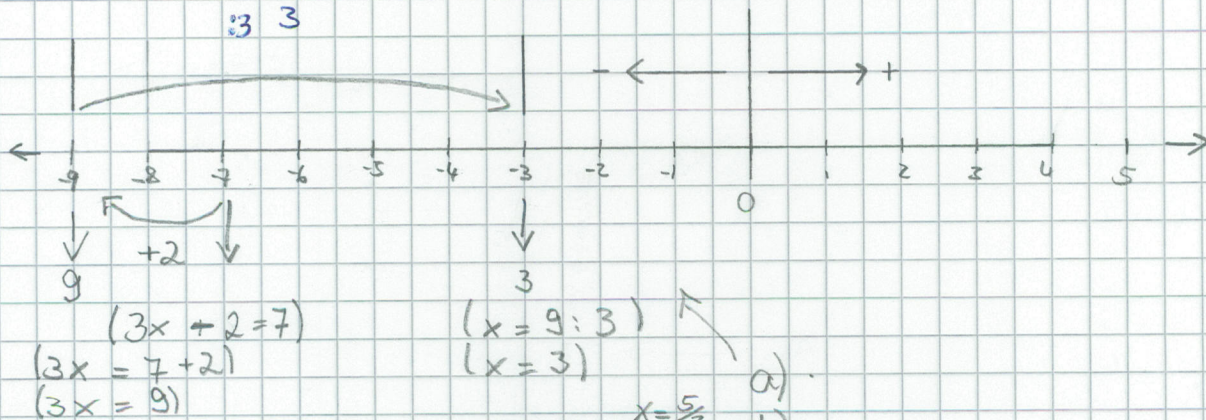
$$3x = 7 + 2$$

$$3x = 5$$

$$3x = 9$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$x = 3$$



An ähnlichen Beispielen lässt sich auch das Problem der Temperatur lösen, beispielsweise wenn das Thermometer gestern noch 25°Grad angezeigt hat und heute nur noch 6°Grad .

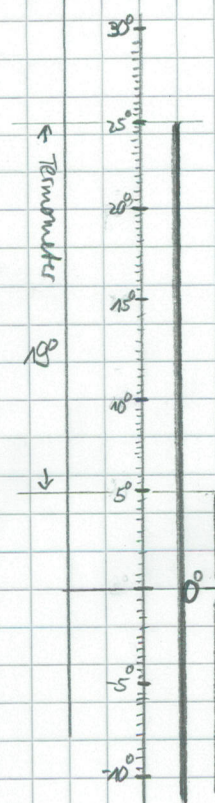
Dann kann man mit Hilfe einer Gleichung das Problem lösen, um wieviel die Temperatur gesunken ist

$$25^\circ - x = 6^\circ$$

$$2 - x = -25^\circ + 6^\circ \quad | +1 \quad \begin{array}{l} \text{a) gestern} = 25^\circ \\ \text{b) heute} = 6^\circ \end{array}$$

$$x = 25^\circ - 6^\circ$$

$$x = 19^\circ$$



Zur Überprüfung kann das Thermometer selbst oder ein Zahlenstrahl weiter helfen.

Wenn die Zahlen komplexer werden, wie z.B. bei einem Bruch oder einer Dezimalzahl, dann sprechen wir von den rationalen, aber auch von den irrationalen Zahlen, dieser Bereich wird durch die reellen Zahlen abgedeckt.

D.h. reelle Zahlen können sowohl eine endliche oder Stellenzahl sprachen, aber auch unendliche Stellenzahlen meinen.

Stellenzahlen sind Dezimalzahlen mit endlichen oder unendlichen Stellen links des Komma (dt. Amerikanischer Übersetzung der Algebraeinführung von Micht 2007).

Dezimalzahlen sind Zahlen, die Teilungen ~~bestimmen~~ von ganzen Zahlen beschreiben. Also 3,1 ist 3 mit 1 Zehnteil, 2,1 mündet, ganze Zahl, in den Fall der 4.

Dezimalzahlen mit rationalen Charakter ~~es~~ geben sich künftige. D.h. sie sind entweder endlich oder periodisch und können als eine Zahl voll ausgeschrieben werden, d.h. bei periodisch natürlich lässt einen einen der periodischen Unendlichkeit beschreiben:

$$2,1 \text{ oder } 3,14 \text{ mit } 3,2$$

Rationale Zahlen können als Dezimalzahlen oder als Bruchzahl B angegeben werden: 2,25 oder $2\frac{1}{4}$

Die Lösbarkeit von Gleichungen ist vorangehen immer gewährleistet bzw. gesichert und an den Zahlenwerten selbst, nur der Umgang mit Gleichungen wird komplexer:

$$\frac{1}{2}x + 2 = 3$$

$$\frac{1}{2}x = 3 - 2$$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

$$x = \underline{\underline{2}}$$

$$| \cdot 2 \text{ oder } : \frac{1}{2} \text{ (Kehrwertangabe)}$$

oder die Aufgabe:

$$3,14x + 3 = 7,2$$

$$3,14x = 7,2 - 3$$

$$3,14x = 4,2 \quad | : 3,14$$

$$x = (4,2 : 3,14)$$

$$x = 1,31 \dots$$

Für die Schüler werden die Gleichungen mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ komplexer und es werden erste Probleme auftreten, da die exakte Überprüfbarkeit dann nicht leicht. Sie sind nicht mit dem bloßen Blick als richtig oder falsch zu erkennen, jedoch oft nicht.

Die irrationalen Zahlen sind Zahlen die sowohl transzendent, als auch unendlich in ihren Kommastellen sind. Beispiele sind die Zahl π oder die eulersche Zahl e . Beide Zahlen werden in der Anwendung nur mit $\mathbb{B}$ mit annähernden Werten verwendet, die Stellenwertfunktionen haben. D.h. dass es grundlegend unmöglich ist mit den genauen Werten zu rechnen, da die Werte unendlichdeutig sind, doch findet eine Berechnung eine Eingrenzung auf eine Endlichkeit erfolgt. Es wäre ohnehin unmöglich mit der höchsten Genauigkeit zu arbeiten, da die analogen Mittel selbst dieser Genauigkeit nicht entsprechen können: Taschenrechner, Zirkel, Bleistift, etc.

Irrationale Zahlen finden Verwendung bei geometrischen Figuren und ihre Flächen oder Volumenformeln (Bsp.: Kreis) Zylinder, Kugel, etc.)

$$A_0 = \pi r^2 \quad \text{oder} \quad U_0 = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Die Lösbarkeit der reellen, bzw. der rationalen und irrationalen Zahlen erfordert, bis auf wenige Ausnahmen einen Taschenrechner. Ob. Gleichungen mit oberstgen. Zahlenwerten werden die Einführung eines Taschenrechners benötigen.

Zusatz für die rationalen Zahlen:

Eine Dezimalzahl kann immer zu Bruch umgerechnet werden, bzw. in Bruch in eine Dezimalzahl. Das Problem handelt dann auf, wenn eine Gleichung beides hat:

$$\frac{1}{7}x + 3,2 = 3 \quad ?!$$

$$1,328x + 3,2 = 3 \rightarrow \text{Dezimalzahl}$$

oder

$$\frac{4}{7}x + 3\frac{2}{5} = 3 \rightarrow \text{Bruch}$$

$$4 : 7 = 1 : 7 = 1,328$$

$$3,2 = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

② Der Wurzelbegriff wird in Geometrieunterricht dann fällig, wenn es um die Umformung einer Seite nach unbekannten Größen in Flächenformeln oder Volumenformeln kommt.

Wenn beispielsweise bei einem ~~Quadrat~~ mit der Angabe $a = \text{unbekannt}$ und ~~Fläche~~ $A = 25 \text{ cm}^2$ gegeben

ist und die Seite nach a gefragt/bzw. gegeben wird, muss der Schüler die Formel umstellen und zur Lösung das Wurzelzeichen benutzen.

$$A = a^2 \quad 25 \text{ cm}^2 = a$$

$$\sqrt{A} = a \quad \sqrt{25 \text{ cm}^2} = a$$

$$5 = a$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	16
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Ein noch wichtigeres Beispiel für die Arbeit mit der Wurzel in Geometrieunterricht ist der Satz des Pythagoras, in dem bei einem Dreieck mit einem rechten Winkel die Summe der Kathetenquadrate, also der Seiten, die den rechten Winkel bilden gleich dem Quadrat der Hypotenuse entspricht, das ist die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c$$

Bem.: Wenn a und b gegeben sind, so muss die Summe der beiden Kathetenquadrate sozusagen "entwurzelt" werden, also es muss die ~~Wurzel~~ Wurzel gezogen werden um c zu bekommen.

Und ~~entsprechend~~ anschließend kann noch die Kreisberechnung mit

$A = \pi r^2$ bei der Umformung nach r erweitert $\Rightarrow$ ~~Fläche~~

$$\sqrt{\frac{A}{\pi}} = r$$

und die Volumenberechnung gleichbreitiger Körper wie Quader oder alle Körper mit Kreisflächen bzw. der Kugel geht.

$$V_{\square} = a^3$$

oder Kugel: $V_0 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

$$a = \sqrt[3]{V_{\square}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{\pi \cdot 4}} = r$$

④ $\sqrt{5}$ heißt die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 5 ergibt.
 Da es sich bei der 5 um keine Quadratzahl handelt, also eine "Kratzideale Zahl" muss sie in der Folge der reellen Zahlen liegen bzw. sehr wahrscheinlich in der Menge der rationalen Zahlen.

5

Eine Annäherung an die Zahl, die der $\sqrt{5}$ entspricht, kann man sich durch eine tabellarische Annäherung nähern, indem man sich ~~die~~ die Zahl mit sich selbst multipliziert, die sich in der Summe an 5 annähert und dabei auch wenn nötig in Dezimal entzweielt um die Stellen erhöht, die an die 5 von der niedrigeren Wert sich annähern oder um die Stellen hinter dem Komma, die in sich selbst Wert sich an die 5 annähern:

$a \cdot a = 5$ wenn 5 das Produkt von $a \cdot a$ bzw. a^2 ist.

	a	a	=>	5	$\sqrt{5}$	I da das Produkt bei 3^2 wesentlich größer ist als 5, muss das passende Produkt durch den einen Multiplikator in der Nähe von 2 sein.
I	2	2		4	$2 < \sqrt{5} < 3$	
	3	3		9		
	2,1	2,1		4,41		
	2,2	2,2		4,84	$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$	
	2,3	2,3		5,29		
	2,21	2,21		4,88		
	2,22	2,22		4,93	$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$	
	2,23	2,23		4,97		
	2,24	2,24		5,02		
	2,231	2,231		4,977		
	2,235	2,235		4,995		
	2,236	2,236		4,9996		
					$\sqrt{5} \approx 2,236$	
					oder $2,236^2 \approx 5$	

Es ist wichtig sich auf eine Kommastelle zu einigen, die am besten geeignet ist, sowohl den Wert für $\sqrt{5}$ anzuzeigen, aber auch genau genug ist, jedoch nicht zu weitläufig, weil irgendwann die Genauigkeit nicht weiter benötigt wird. D.h. was sollen Schüler mit 26 Stellen hinter dem Komma anfangen, wenn 4 Stellen genügen.

A) Bedeutung, Ziele, Inhalte, Beringe

Die Quadraturwurzel gibt die Zahl wieder, die mit sich selbst multipliziert eine Quadratzahl wiedergibt. d.h. alle Quadratzahlen können durch das Ziehen der Quadraturwurzel aus ihren Produkten in ihren ursprünglichen Wert zurückgeführt werden.

Für den Schüler ist das Ziehen der Quadraturwurzel für die Zukunft unentbehrlich. Die Quadraturwurzel ist elementar für viele geometrischen Formelumstellungen, für das Finden von Nullstellen in der Algebra bei quadratischen Funktionen, oder sogar komplexen Funktionen.

Für die Zukunft der Schüler ist sie besonders bedeutend in späteren handwerklichen Berufen oder mathematischen zeichnerischen Bereichen.

Für die Gegenwart erweitert der Begriff und der Umgang den mathematischen - verständnisbereich, Begriffe, logische Zusammenhänge.

Sie erweitert die Fachkompetenzen und die Selbstständigkeit mit mathematischen Problemen.

Als Gegenteil von der Potenz, ist die Quadraturwurzel bestätigend und festigend für den Potenzbegriff. Durch Potenzen und Quadraturwurzeln werden Arbeitsabläufe der mathematischen Problemlöslichkeit vereinfacht, bzw. verhiert.

Insbesondere in der Geometrie ist der Wurzelbegriff unentbehrlich.

Die gesellschaftliche Relevanz findet sich in der beruflichen Bildung wieder, in der in vielerlei Hinsicht der Umgang mit der Quadraturwurzel elementar ist.

Da sich in der Arbeit oder dem Umgang mit der Quadraturwurzel eine einfache Handhabung, bzw. eine Zugänglichkeit wiederfindet, kann man auch einen schnellen Erfolg provozieren, der die Schüler und ermuntert, sich mit komplexen, "unselbstständigen" mathematischen Problemen auseinander zu setzen. Die "Quadraturwurzel" stellt somit meist nur den scheinbaren Charakter bezüglich der Potenzen, bzw. Quadratzahlen, sondern eröffnet auch einen anderen Weg im Umgang in der Mathematik selbst.

Es ist eine hohe Zugänglichkeit gegeben, die die Schüler und die Angst vor dem Versagen, nicht - Lösen - können nehmen kann.

B) Sachanalyse

Die Quadraturwurzel ist die einfache Wurzel und gibt den Wert wieder, mit der eine Zahl mit sich selbst multipliziert eine Quadratzahl produziert. Mit der Quadraturwurzel wird der Vorgang des Quadrierens rückgängig gemacht, bzw. ~~umgekehrt~~ gibt die Bedingung an, die das Quadrieren umkehren soll.

Die Quadraturwurzel hat das Zeichen $\sqrt{x}$, bei dem x den Wert angibt dessen Wurzel gezogen werden soll. Die Quadraturwurzel bezieht sich auf eine Quadratzahl, bzw. der Potenz 2.

$$a^2 = a \cdot a \Rightarrow a = \sqrt{a^2}$$

Die nächsthöhere Wurzel ist die dritte Wurzel, bzw. aufsteigend mit $n \Rightarrow \sqrt[n]{x}$

C) Unterrichtsverlauf

7

1. Teilziel:

Wie komme ich von Wert einer Quadratzahl zu ihrem Ursprung: ihrer Wurzel zurück?

2. Teilziel:

Wie habe ich mir eine Quadratwurzel vorzustellen? Quadratwurzel in Taschenrechner und in der Tabelle.

D) Unterrichtseinheit

I Aktivationsphase Impuls

L: "Ich habe ein Problem!"

$$\text{Tafel } a \cdot 5 = 81$$

S: Denken sich verschiedene Zahlen aus, die 81 ergeben.

L: ~~Tafel~~ "Das klingt gut, aber ich habe ein besonderes Problem!"

$$a \cdot a = 144$$

S: Fich erkl. die teil durch Potenz, ~~Annäherung~~

L: "Das war schwer oder? Test wie Wurzeln ziehen? Wie komme ich, das Problem so lösen, dass es immer geht?"

S: überlegen, kommen auf eine Tabelle

L: Leitet durch Überlegung an

II Hypothesenbildung Problemlösung Erwartungssphäre gleichte Problemlösung Heuristik - aristotelisch Verfahren

Eintrag auf die
Quadratztabelle
(1x1)

1. Teilziel • Erarbeitung einer "Tabelle der
Quadratztahlen"
Material: Taschenrechner

$$a \cdot a = ~~144~~ 144$$

$$a \cdot a = 256$$

→ Die Quadratztahlen werden erinnert;
→ Tabelle:

Tabelle für die
Kontrollfunktion
bzw. Quadrat-
zahlen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	...	18
3	3	6	9	...					...
4	4	8	...	16					
5	5	10			25				
6	6					36			
7	7						49		
8	8							64	
9	9	18	...						81

2. Problemstellung Hypothesenbildung

L: "Jetzt haben wir eine Tabelle, die Quadratwurzeln von ganzen, bzw. natürlichen Zahlen hat."
L: Tafel " $a \cdot a = 5$ "
"Ich habe jetzt ein mathematisches Problem!"

S: Stellen Vermutungen auf, wie man das Bogen lösen kann.

2. Teilziel

das Arbeit mit einer Annäherungstabelle

↳ geleiteter Lösungssuch

S: erstellen Tabelle und probieren mit dem Taschenrechner natürliche Zahlen aus:

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

L: "Was nun?"

S: Suchen Kommastellen!

L: hilft an der Tafel mit, schreibt:

$$2^2 < 5 < 3^2$$

↳ die Tafel wird mit eingebunden

Begriffe: $<$ kleiner als
 $>$ größer als
Tabelle

S und Lehrer erstellen eine Tabelle zur Annäherung an der Tafel. (siehe Aufgabe 4.)

Sicherung mit einer neuen Tabelle und Einführung des Wurzelbegriffs

Begriffe: $a^2 \Rightarrow$ Potenz
 $\sqrt{a} \Rightarrow$ Wurzelziehen
 $a \cdot a = a^2 \rightarrow$ einfache Gleichung

L: schreibt an die Tafel

$$a \cdot a = a^2 \quad a = \sqrt{a^2}$$

$$a \cdot a = 5 \quad a = \sqrt{5}$$

L: "wenn ich a^2 mal nehme?"

S: "Quadratisches Multiplizieren, etc."

L: "Und wenn ich zurückziehen heißt das Wurzelziehen"

L: erklärt zu Horsthus und zur Festigung den Arbeitsgang mit Wurzel ziehen.

Sicherung Begriff $\sqrt{a}$
Text mit dem Taschenrechner

⇒ "Das war jetzt ganz schön aufwendig für eine Zahl oder? Fast wie Wurzelziehen"

L: "Schaut mal auf den Taschenrechner"

"Gibt mal $\sqrt{\quad}$ mit 5 ein!
Was kommt raus?"

"Was macht dieses Zeichen also?"

E) grundlegender Inhalt

9

Die Schüler werden zunächst mit einem grundsätzlichen Problem konfrontiert, dass in ersten Augenblick (Initial) im Kopf gelöst werden kann, dann aber mit der Erweiterung, dass der Wurzel einer nicht-Quadratzahl zu ziehen konfrontiert.

Mit Hilfe des Lehrers sollen die Schüler von einer Tabelle mit den Quadratzahlen auf eine Tabelle übergehen, die die Annäherung an die gesuchte Wurzelzahl unterstützt.

Dabei werden unter anderem die Begriffe: Quadratzahl, $<$ $>$ größer, kleiner sowie die indirekte Arbeit mit Variablen und einer einfachen Gleichung eingeführt oder wiederholt.

Der Taschenrechner kann als Werkzeug genutzt werden.

Nach dem Arbeiten mit Tabellen.

Ein theoretisch kann auch ein Tabellenkalkulationsprogramm genutzt werden, ist ~~ist~~ jedoch die Arbeit der Annäherung nicht wiederholbar und könnte in einer folgenden Stunde evtl. genutzt werden. Hierzu kommt, dass mit der Nutzung des Taschenrechners erst ein Bewusstsein für Annäherung praktiziert wird, während für einige das Tabellenprogramm evtl. das Thema auf eine Abstraktionsniveau belassen würde. Bei Problemen im Verständnis, was das Programm überhaupt tut und die Anwendung des Wurzelzeichens auf den Taschenrechner wird zur direkteren Verbindung von der Arbeit mit dem Taschenrechner und dem Taschenrechner für die Verknüpfung dieser Arbeit. Auch kann dadurch eine gewisse "unvermeidliche" Assoziation - Brücke von der Arbeit zu den Begriffen "Wurzel" ziehen" gestärkt werden.

Die Tabelle sollen die Schüler den Begriff des Wurzelziehens nachvollziehen können, ohne zu wissen, wie sich das überhaupt nennt, was sie da bearbeiten. Der Begriff dient der Festigung der Tätigkeit, daher taucht er in dieser Einheit erst nach der Arbeit mit dem Verfahren auf.

Das erste tabellarische Arbeiten dient der Einführung ~~und~~ des Problems mit Quadratzahlen, aber auch zur Einführung der Tabelle selbst, also Assoziationsgrundlage: "Wenn ich für Quadratzahlen eine Tabelle habe, dann gibt es vielleicht auch eine für alle anderen Zahlen."

Die Annäherungstabelle soll auch verdeutlichen, dass es unendlich viele Möglichkeiten ~~von~~ ~~von~~ Zahlen die Wurzel zu ziehen.

~~Die~~ Die Schüler sollen somit darauf schließen dass auch irrationalen eine Quadratzahl haben.

F) weiterführende Themen

→ Geometrie: Flächenbegriff, Volumenbegriff gleichzeitiger Figuren, etc.

→ Algebra: pq-Formel