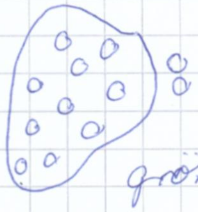
1. Zunächst soll das Dezimalsystem im Allgemeinen dargestellt sein. Es gründet auf der Grundzahl 10 („Dezi" von lat. decem); kurz $g = 10$. Dabei gibt es genau zehn Ziffern, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Die Zehn selbst wird schon aus zwei Ziffern, nämlich 1 und 0 gebildet. Das Dezimalsystem beinhaltet die Vorgehensweise, immer nach der Anzahl 10 zu bündeln, d. h. dass eine höhere Stufe aus zehn kleinen Einheiten besteht.



→ zehn kleine Einheiten bilden die nächstgrößere Einheit!

Die Darstellung von Zahlen im Dezimalsystem erfolgt in einer sogenannten Stellenwerttafel, auch Stellenwertsystem genannt. Hierbei wird das Prinzip des „Bündelns" wieder deutlich. So wird in die „erste" Spalte beim Aufbau des Stellenwertsystems eine Ziffer eingetragen, die dann für die Anzahl von einzelnen Einheiten steht. Die nächste Spalte links davon beschreibt die Anzahl der Zehnerbündel.

Die Ziffer die beschreibt die Anzahl dieser Bündel, der Wert dieser Spalte insgesamt ist aber ein anderer.

Graphisch lässt sich die Stellenwerttafel wie folgt veranschaulichen:

E
3

„E" soll die Anzahl der „Einer", also der einzelnen Einheiten sein!

Führt man den gesamten Gedankengang von oben fort, so steht in der nächsten Spalte links davon die Anzahl der Zehnerbündel (oder auch: Zehner)

Z	E
1	3

Z = Zehner

In der Zehnerspalte steht zwar die Ziffer 1, sie bezeichnet aber die Anzahl der Zehnerbündel $1 \times 10 = 10$. Es sind somit 10 Einheiten durch die ~~Zehn~~ Ziffer 1 in der Zehnerspalte beschrieben. Dadurch wird deutlich, dass im Dezimalsystem eine Abweichung von Ziffernwert und Stellenwert vorliegt. Oben sind demnach 13 Einheiten beschrieben: $1 \times 10 + 3 \times 1 =$
$= 10 + 3 = 13$!

Die nächste Spalte links davon bündelt nun je zehn Stück der Zehnerpäckchen. Somit ist der Wert der Ziffer in der sogenannten Hunderterspalte wiederum abweichend vom Stellenwert.

H	Z	E
2	1	3

Der Ziffernwert „2" bedeutet an dieser Stelle demnach 2 mal zehn Zehnerpäckchen also $2 \cdot 10 \cdot 10$ Einzeleinheiten => 200
Da das Bündeln stets nach der Zahl bzw. Anzahl zehn vorgenommen wird, lässt sich die Einerspalte auch mit 10^0 usw. beschreiben.
Daraus folgt folgende Darstellungsmöglichkeit:

$\xleftarrow{\cdot 10}$ … Hundert $\xleftarrow{\cdot 10}$ Zehner $\xleftarrow{\cdot 10}$ Einer

Natürlich lässt sich, von links nach rechts gelesen auch entbündeln, so dass die Darstellung erweitert werden muss,

$10^3 \xleftarrow{\cdot 10} 10^2 \xleftarrow{\cdot 10} 10^1 \xleftarrow{\cdot 10} 10^0$

T	H	Z	E

T=Tausender

Da Ziffernwert ungleich dem Stellenwert ist, muss die Ziffer mit dem Faktor der Stelle multipliziert werden, um Zahlen darstellen zu können

Bsp.:

10^2 H	10^1 Z	10^0 E
2	3	5

Um den Wert dieser Zahl zu erfassen, muss wie folgt vorgegangen werden:

$$2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 =$$
$$= 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1 =$$
$$= 200 + 30 + 5 = 235$$

Besondere Bedeutung kommt dabei der Ziffer Null zu. Wenn eine Stelle nicht besetzt ist bzw. nicht besetzt sein soll, darf man die Ziffer nicht einfach zusammenrücken, sondern in die Stelle muss 0 eingetragen werden.

Bsp.:

10^3 T	10^2 H	10^1 Z	10^0 E
2	0	4	3

$$2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 =$$
$$= 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 1 =$$
$$= 2000 + 0 + 40 + 3 = 2043$$

Man addiert also die jeweiligen Stellenwerte und nicht die Ziffernwerte.

Um die Darstellung von „existierenden" (= reellen) Kommazahlen zu zeigen, muss die Stellenwerttafel auch nach rechts hin erweitert werden.
Folgt man dem Vorgehen wie oben so gelangt man zur Stelle rechts der Einer durch Division durch 10! Diese Stelle bezeichnet man als „Zehntelstelle" (= z)

$$Z \xrightarrow{:10} E \xrightarrow{:10} z$$

Diese Logik kann man fortführen, sodass folgende Kopfleiste des Stellenwertsystems erfolgt:

$$\begin{tikzcd}
\ldots & T \arrow[r, bend right, ":10"'] & H \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & Z \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & E \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & z \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & h \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & t \arrow[l, bend right, "\cdot 10"']
\end{tikzcd}$$

(h = Hundertstel) (t = tausendstel)

Die Ziffer an der Zehntelstelle muss demnach mit dem Faktor $10^0 : 10 = 10^{-1}$ multipliziert werden, Hundertstelstelle 10^{-2} usw.

Bsp.:

10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
Z	E	z	h
2	1	2	3

$2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} =$

$= 20 + 1 + 0{,}2 + 0{,}03 = 2103$!?

Diesbezüglich würde ja 2103 als Summe herauskommen. Doch um Kommazahlen darzustellen braucht man eine Stelle an der man sich orientieren kann und das Komma auch sehen kann. Zu vorigem Beispiel folgt also

Z	E	z	h
2	1	2	3

Stelle, an der das Komma gesetzt wird

$\Rightarrow 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}03 =$

$\underline{= 21{,}23}$

Die Stellenwerttafel lässt sich nach links und rechts unendlich fortsetzen.
Dabei kann man ganz allgemein folgendes formulieren.

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 +$$
$$a_{-1} \cdot 10^{-1} \ldots\ldots a_{-r} \cdot 10^{-r} =$$
$$\Rightarrow \quad a = \sum_{i=-r}^{n} a_i \cdot 10^i \quad \text{(wobei } n \text{ und } r \in \mathbb{N} \text{ sind)}$$

Die Kommadarstellung der reellen Zahlen basiert also auf der Addition der Produkte der Ziffer an einer Stelle mit dem entsprechenden „Stellenfaktor“.

2. Für die Einführung von Dezimalbrüchen (6. Klasse Hauptschule) eignen sich mehrere verschiedene Möglichkeiten.
Zum einen gibt es die Möglichkeit, Dinge aus dem Alltag der Schüler aufzugreifen und in den Unterricht als Einstieg mitzunehmen. Dazu eignen sich z. B. eine Wasserflasche, die einen Inhalt von 0,7 Litern hat. Auch beim Kochen stoßen die Schüler auf Dezimalbrüche, wenn sie eine Suppe anrühren und dabei 0,375 Liter Wasser benötigen. Aber auch beim Einkaufen haben Schüler Kontakt zu Dezimalbrüchen, denn die Preise werden in aller Regel mit Dezimalbrüchen ausgezeichnet z. B. 1,39 Euro. Dabei ist das Geld wohl diejenige Größe mit dem die Schüler am meisten zu tun haben. Diese sollte dann wohl auch in den Einstieg zum Thema Dezimalbrüche bedacht werden. So kann der eine fiktive Einkaufsrechnung auflegen.
Die Schüler sehen den Endpreis und kennen die Situation auch aus dem eigenen Lebensbereich. Der Lehrer kann sagen, dass er das gestern im Supermarkt bezahlt hat und jetzt gerne wissen möchte, wie viele

Cent das nun sind. Die Schüler mussen nun überlegen, wieviele Cent denn ein ganzer Euro sind?

1 € = 100 Ct

Der Lehrer hat z.B. 8,50 € bezahlt. Die Schüler können sagen, dass die 8 € schon einmal 800 Ct ~~oder Ct~~ sind. Dann bleibt für die Schüler immer noch die Aufgabe zu lösen wie viele Ct der Rest ausmacht.

„50 Cent sind ein halber Euro" könnte eine mögliche Aussage sein. Demnach sind 8,50 € = 850 Ct!

1 € sind 100 Ct wurde von den Schülern festgestellt „50 Ct sind ein halber Euro" also $\frac{1}{2}$ €.

Wenn die Schüler nun wieder den Ausgangsbetrag ansehen, dann stellen sie fest, dass

50 Ct = 0,50 Euro sind.

Darauf kann dann weiter durch den Lehrer aufgebaut werden.

Eine weitere Möglichkeit der Einführung ist mit Hilfe der schon genannten 0,7 l Wasserflasche. Der Lehrer bringt eine 0,7 l Flasche mit und zeigt sie den Schülern, die sie wohl alle schon einmal gesehen haben oder auch zu Hause haben

Der Lehrer lässt die Schüler raten, ob denn in der Flasche mehr oder weniger als 1 ganzer Liter ist. Die Schüler werden wohl aus ihrem Alltagswissen heraus antworten, dass es weniger sind.
Der Lehrer stellt nun die Frage, wie viel dann noch zu einem ganzen Liter abgeht und lässt die Schüler in Partnerarbeit überlegen. Parallel dazu gibt der Lehrer den Inhalt der Flasche in einen Messbecher. Anschließend sollen die Schüler ihre Lösungen preisgeben. Auch wenn die richtige Lösung dabei war, sollte trotzdem im Sinne der Anschaulichkeit weiter gemacht werden.
Zunächst lässt der Lehrer die ~~Menge dazu die von den Schülern beschrieben wurde~~ Schüler zum Messber kommen und ablesen, bei welchen ~~Sta~~ Stand das Wasser ist. -> Schüler rufen 700 ml.
Dann lässt der Lehrer wiederholen, wie viele Milliliter denn ein ganzer Liter hat.
Antwort: 1000!
Lehrer kann dann fragen, wie viel ml also noch fehlen, um einen ganzen Liter zu haben; Schüler antworten 300 ml.

Der Lehrer füllt mit Hilfe des zweiten Messbechers 300 ml ab und gibt diese dazu.
Dabei stellen die Schüler fest, dass nun ein ganzer Liter in dem Messbecher ist.
Der Lehrer hält mit Hilfe der Schüler fest:
0,7 l waren 700 ml.
-> Was könnten dann 300 ml in Litern sein?
Schüler antworten 0,3 l
Anschließend wird festgehalten, dass 300 ml + 700 ml = 1000 ml sind und 0,3 l + 0,7 l = 1,0 l
Diese Sachlage kann als Grundstein angesehen werden.
Eine weiter Möglichkeit ~~dies~~ für die Einführung von Dezimalbrüchen ist das Nutzen der Stellenwerttafel.
Dabei kann zunächst das Wissen über diese, das die Schüler aus dem Ende der Grundschule und der 5. Klasse haben, wiederholt und parat gemacht werden.
Die Schüler haben bis daher „nur" die Stellenwerttafel vom Einer aus in die linke Richtung kennengelernt.
Bsp.:

Z	E
3	0

Die Schüler wissen, dass die 3 in der Zehnerspalte für $3 \cdot 10$ steht und die Zahl demnach 30 ist. Darüber hinaus wissen sie, dass man zehnerweise bündelt und um in die nächste Spalte zu gelangen mit 10 multipliziert werden muss, z. B. $100 \cdot 10 = 1000$ ($H \cdot 10 = T$), und um in die nächstrechte Spalte zu gelangen durch 10 dividiert werden muss: $1000 : 10 = 100$ $\Leftrightarrow$ $T : 10 = H$.

Der Lehrer kann nun festhalten, ~~ob~~ denn die Stellenwerttafel, die jeder Schüler auch zeichnen soll, denn auch nach rechts fortgeführt werden kann? Die Schüler sollen dies überlegen und Möglichkeiten überlegen.

Der Lehrer kann auch Folgendes zur Unterstützung des Denkens der Schüler an der Tafel notieren.

$$\begin{tikzcd} 100 \arrow[r, bend right, ":10"'] & 10 \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \arrow[r, bend right, ":10"'] & 1 \arrow[l, bend right, "\cdot 10"'] \end{tikzcd}$$

H Z E

Die Schüler denken, dass man 1 durch zehn teilt, um dann eine Stelle rechts von den Einern zu erhalten und ergänzt.

Z	E	z
1	2	2

↑
Kommastelle „zwischen E und z"

Schüler notieren dann die Zahl 12,2 aus

$1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10}$

Anschließend kann folgendes Beispiel behandelt werden

E	z
0	1

Schüler stellen fest 0,1; dies ist dasselbe wie $\frac{1}{10}$ und halten fest $\frac{1}{10} = 0,1$

Auf dieser Basis kann weiter der Dezimalbruch-begriff aufgebaut werden.

3. Auch im Umgang mit Dezimalbrüchen können Schüler Schwierigkeiten haben und Fehler machen. Fehler sollten aber grundsätzlich nicht als „falsch" abgewertet werden.
Mit Hilfe der Fehler kann der Lehrer nämlich auch die Denkweise der Schüler nachvollziehen und somit auch den Unterricht optimieren.

Zunächst können Schüler schwierigkeiten beim Vergleich von Dezimalbrüchen haben
Bsp. $0,1 < 0,07$ (aus Schülersicht)
Der Schüler meint, dass die 0,1 kleiner ist als 7 (was ja auch stimmt). Der Schüler macht hier zwischen Ziffernwert und Stellenwert keinen Unterschied. Man muss ihm aber aufzeigen, dass die 1 im Stellenwertsystem weiter links steht als die 7, d.h. $\frac{1}{10}$ oder 1 Zehntel größer ist als die $\frac{7}{100}$ oder 7 Hundertstel.
Die Schüler sollen ruhig die Einordnung nochmals selbst durchführen: entweder selbst zeichnen oder im vorgegebenes Stellenwertsystem eintragen.
Merksatz notieren: Je weiter links eine Zahl/Ziffer, desto größer ihr Stellenwert.

Weitere Schwierigkeiten für Schüler stellt das Einordnen der Dezimalbrüche in die Stellenwerttafel dar.
Da die Schüler von einer Symmetrie auch beim Stellenwertsystem ausgehen, kann die Kopfleiste des Stellenwertsystem wie folgt aussehen:

Z	E	e	z

(mögliche Schülerdarstellung)

Sie, die Schüler, sehen die Kommastelle quasi als Spiegelachse an. Wenn es Zehner und Zehntel gibt, warum sollte es dann nicht zu den Einern auch „Eintel" geben? Dies muss vom Lehrer expizit klargestellt werden, dass es das nicht gibt und das man $\frac{1}{10}$ (Zehntel) erklärt wenn man ein Ganzes durch 10 teilt.
Möglicherweise kann der Lehrer dies durch teilen eines Kuchens in zehn gleich große Teile veranschaulichen.

Darüber hinaus ist die Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in Dezimalbrüche auch ein Problem für die Schüler.
Die Schüler wissen ja, dass $\frac{1}{10} = 0{,}10$ ist.
Dadurch aber schließen die Schüler dass analog dazu auch andere Brüche, die die 1 im Zähler haben in Dezimalbrüche umgewandelt werden, indem man den Nenner als Nachkommastelle notiert, kurz $\frac{1}{n} = 0{,}n$ (natürlich aus Schülersicht)
So schreiben viele Schüler $\frac{1}{5}$ als 0,5 und $\frac{1}{4}$ als 0,4.
Um diese Fehler zu vermeiden, muss

die Lehrkraft festhalten, dass diese Art der Umwandlung in Dezimalbrüche nur dann funktioniert, wenn im Nenner 10 steht. Die Nenner 100, 1000... müssen seperat behandelt werden!

Andererseits müssen die Schüler lernen, den Bruch auf Zehntel zu erweitern/kürzen.

Wenn die Schüler behaupten $\frac{1}{5}$ sei 0,5 dann kann der Lehrer mit der Gegenfrage kontern, was den $\frac{1}{2}$ als Dezimalbruch sei? Schüler sehen denn, dass da etwas nicht stimmt und überlegen noch mal.

Weitere Schwierigkeit für die Schüler ist der Stellenwert derselben Ziffer. Als Beispiel soll folgendes gelten: 0,05 und 0,005

Auf die Frage, was denn hierbei grösser oder kleiner oder ob sie gleich seien, antworten viele Schüler, sie seien gleich, da ja 5=5 sei.

Dieses Problem, ähnlich wie das als erstes beschriebene, kann damit behoben werden dass die Schüler die Ziffer 5 wirklich in verschiedene Spalten (evtl. ist grösse, hölzerne Stellenwerttafel vorhanden) einordnen zu lassen.

Dabei sehen sie, dass zwar beidemale die Ziffer 5 genutzt, aber in verschiedene Spalten gelegt wird. Die Ziffer, die weiter links liegt, hat den grössten Stellenwert!

Auch das Rechnen mit dem Dezimalzeichen ist für viele Schuler schwierig und mit Fehlern behaftet.
Folgenden Rechenfehler findet man bei Schulern häufig:

$$3,18 + 2,4 = 5,22$$

Die Schüler ~~addieren~~ addieren die 3 und die 2 und erhalten 5 Ganze und addieren anschließend die 18 und die 4, um auf die 22 zu kommen.
Diesem typischen Fehler kann dadurch vorgebeugt werden, indem man bei der Behandlung immer das Normalverfahren der schriftlichen Addition verwendet, die Zahlen untereinander schreibt und darauf achtet, dass immer das Komma der einen Zahl unter dem Komma der anderen Zahl ~~[illegible]~~ steht!

↓ Verbesserung

$$\begin{array}{r} 3,18 \\ +\ 2,40 \\ \hline 5,58 \\ \hline\hline \end{array}$$

Dabei können nicht besetzte Stellen durch die Null ersetzt / aufgefüllt werden.

Weiterer häufiger Fehler ist eine Differenz zwischen geschriebener Zahl und gesprochenem Dezimalbruch. Häufig passiert es, dass die Zahl anders gesprochen wird:
3,75 wird/kann von Schülern als ~~3~~ drei-Komma-siebenundfünfzig ausgesprochen werden. Anders herum kann sieben-Komma-dreiundneunzig wie folgt geschrieben werden: 7,39.
Dieser, natürlich falschen, Schreib- und Sprechweise, kann insoweit vorgebeugt werden, dass man die Nachkommastellen von Anfang an Stellenweise spricht. Das bedeutet, dass man 3,75 als drei-Komma-sieben-fünf spricht. Somit wird ~~mit~~ eine Falschschreibung der Zahl nahezu gänzlich ausgeschlossen.
Die Inversion bei der Sprechweise von Zahlen im Deutschen muss hier unbedingt durch das Sprechen von Einzelziffern der Position nach ersetzt werden, um den Schülern den Umgang mit den Dezimalbrüchen zu erleichtern

4. Bei den reellen Zahlen muss in der Dezimaldarstellung zwischen endlichen und unendlichen Dezimalbrüchen unterschieden werden.
Falls es sich um einen unendlichen Dezimalbruch handelt, kann zwischen periodischen und nichtperiodischen unterschieden werden. Periodische Dezimalbrüche können wiederum gemischt - oder reinperiodisch sein. Die Unterscheidung ist wichtig für die Umwandlung in gewöhnliche Brüche, wie sich zeigen wird.
Zunächst die Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche:

1. endlicher Dezimalbruch

$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

Zehntelstelle Hundertstel-Stelle

$3{,}755 = 3\frac{755}{1000} = 3\frac{151}{200}$

Tausendstel

man sucht an welcher Stelle die letzte Ziffer steht und erhält dadurch den Nenner!

2. unendlicher, periodischer Dezimalbruch
(reinperiodisch)

$0{,}\overline{3} = 0{,}3333\ldots.$

Umwandlung:

$$x = 0{,}\overline{3}$$

$$10\,x = 3{,}3333\ldots$$

$$-\quad x = 0{,}3333\ldots$$

$$9\,x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Durch das Subtrahieren fällt der unendliche Rest weg, übrig bleibt ein Bruch nach dem Lösen der Gleichung

3. unendlich, gemischtperiodischer Dezimalbruch

Umwandlung

$$x = 5{,}\overline{54} = 5{,}545454\ldots$$

$$100\,x = 554{,}\overline{54}$$

$$-\quad x = 5{,}\overline{54}$$

$$99\,x = 549 \qquad |:99$$

$$x = \frac{549}{99} = 5\frac{6}{11}$$

Ebenso wie in 2. fällt der unendliche Rest durch Subtraktion weg.

4. unendlich, nichtperiodischer Dezimalbruch

=> kann nicht als Bruch dargestellt werden, da der unendliche Rest durch Subtraktion nicht wegfallen kann!

Nun erfolgt die Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in Dezimalbrüche:

1. Gemischte Zahl in Dezimalbruch:

$$3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = 3 + \frac{8}{10} = 3 + 0,8 = 3,8$$

Bruch auf Zehntel erweitern

Stelle nach dem Komma

2. Bruchstrich kann Ersatz für das Geteilt-Zeichen sein:

$\frac{5}{8} = 5 : 8 = \underline{\underline{0,625}}$

↱ Normalverfahren der schriftlichen Division anwenden

$$\begin{array}{r} 50 \\ -48 \\ \hline 20 \\ -16 \\ \hline 40 \\ -40 \\ \hline 0 \end{array}$$

↑ das Komma notiert man, wenn man sich von der ersten Null der 5,000... bedient

3. Umwandlung durch vorheriges Erweitern

$\frac{6}{25}$ → könnte durch Division auch gelöst werden

aber andere Möglichkeit: $\frac{6}{25} \overset{\cdot 4}{=} \frac{24}{100}$

$\frac{24}{100}$ die letzte Ziffer des Zählers muss an die Hundertstelstelle: $\underset{E\ z\ h}{0,24}$ $\quad \frac{24}{100} = 0,24$