Thema Nr. 2

Aufgabe 2

Der erste Schritt der Volumenberechnung in der Realschule ist die Berechnung des Volumens von ~~Einheits~~-Würfel. Direkt im Anschluss erfolgt die Berechnung des Volumens von Quader. Diese beiden Schritte erfolgen bereits in der 6. Klasse. Dabei wird vorallem auf das Auslegen mit Einheitswürfeln zurückgegriffen um die Formeln der Volumenberechnung herzuleiten.

Logischerweise sind die folgenden Schritte so gewählt, dass man immer auf, dem Schüler bereits bekannte Formeln zurückgreift um die nächsten Volumenberechnungen einzuführen.

Der nächste Schritt der Volumenberechnung erfolgt dann erst in der 9. Klasse, nämlich die der Prismas. Dies bietet sich deshalb, da für beide Körper gilt V = Grundfläche multipliziert mit der Höhe. z.B. mit Hilfe des „Cavalierischen Prinzip" kann dieser „Transfer" dem Schüler sehr gut veranschaulicht werden.

Es folgt der Schritt vom Prisma zum (Kreis) Zylinder (9. Klasse). Hier kann man ebenfalls auf die bereits bekannte Formel vom Quader/Prisma zurückgreifen. Einziger Unterschied zu vorher ist, dass die Schüler

anstatt einer n-Eckigen-grundfläche, eine kreisflächige Grundfläche berechnen müssen. Dies sollte in der 9. Klasse jedoch kein Problem für die Schüler darstellen.
Ebenfalls in der 9. Klasse folgt dann der Schritt zur Volumenberechnung der Pyramide. Mit Hilfe der bereits bekannten Volumenformel des (dreiseitigen) Prismas kann diese den Schüler (vgl. Aufgabe 1) sehr schön verdeutlicht werden. So dass man schließlich auf die Formel $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Prisma}$ kommt usw.
schließlich folgt ebenfalls noch in der 9. Klasse der Schritt zum (Kreis-)Kegel. Bekanntes Wissen über die Pyramide, hilft dabei ebenfalls wieder um auf das Volumen des Kegels zu kommen z.B. durch Umschüttversuche, Cavalieri etc.
Schließlich bildet die Berechnung des Kugelvolumens den Abschluss der Volumenberechnung in der Realschule, dies erfolgt in der 10. Klasse. Ebenfalls mit Hilfe von bekannten Wissen, z.B. über die Herleitung von Ausfüllen der Kugel mit Pyramiden kann diese Formel der Volumenberechnung erarbeitet werden.

Aufgabe 1)

Zunächsteinmal möchte ich die Volumenformeln sowohl für das Prisma als auch für die Pyramide definieren.

Prisma: $V = F_G \cdot h$

d.h. das Volumen des Prismas ist das Produkt der Grundfläche multipliziert mit der Höhe.

Pyramide: $V = \frac{1}{3} F_G \cdot h$

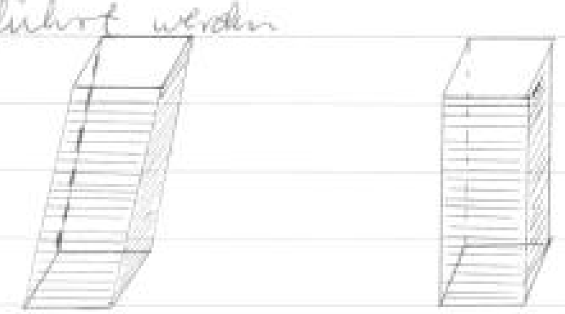
d.h. das Volumen der Pyramide ist das Produkt von einem Drittel seiner Grundfläche multipliziert mit der Höhe.

~~Zunächst mi sollen Ideen zur Herleitung der Volumenformeln für Prisma erläutert werden.~~

Grundsätzlich kann man sagen, dass man bei der Herleitung von Volumformeln, auf bereits bekanntes Wissen zurückgreift. D.h. man versucht bei der Herleitung des Volumens eines unbekannten Körpers, Wissen zu transferieren, bzw. den ~~Körper~~ unbekannten Körper so ~~und~~ umzubauen oder zu vergleichen dass man dessen Volumen berechnen kann.

Zunächst sollen Ideen zur Herleitung der Volumenformen für Prismen erläutert werden.

- Die erste Möglichkeit ~~um~~ die Volumenformel des Prismas herzuleiten wäre, das man ein~~e~~ Prisma in einen Quader umbaut und so auf die ~~Vol~~ Volumenformel stößt. Ein Bsp. für solch einen „Umbau" könnte z.B. mit ~~Hilf~~ Hilfe von Rechteckigen Bierdeckeln durchgeführt werden



Prisma $\xrightarrow{\text{Umbau}}$ Quader

$V_{Prisma} = V_{Quader}$

Die ~~Als~~ zweite Möglichkeit die Volumenformel des Prismas herzuleiten beruht auf dem Prinzip des Cavalieri.

Dieses besagt

Wenn zwei Körper die gleich große Grundflächen und Höhen besitzen und die Größe der Schnittfläche zu ebenen Schnitten in gleicher Höhe dieser beiden Körper ebenfalls übereinstimmen, dann sind sie Volumengleich

Vergleicht man ein Prisma nun mit einem Quader nach obigen Kriterien, so kann man ebenfalls auf die Volumenformel für das Prisma herleiten.

Als dritte Möglichkeit die Volumenformel herzuleiten sollen Messversuche erläutert werden. Indem man z.B. einen Quader und ein Prisma mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe als „Füllmodelle" vergleicht. Dies kann anhand von Umschüttversuchen mit Wasser erfolgen oder z.B. indem man die beiden Modelle mit Sand auffüllt und gleichzeitig wiegt (Wiegeversuch). Man kommt immer wieder zu dem Ergebnis V_{Prisma} = ~~[illegible]~~ V_{Quader}

Jetzt sollen Ideen zur Herleitung der Volumenformel für Pyramiden folgen.

- Die geeignetste Idee das Volumen einer Pyramide herzuleiten besteht darin, ein dreiseitiges Prisma mit zwei ebenen Schnitten so zu schneiden, dass daraus drei volumengleiche Pyramiden entstehen. So liegt die Volumenformel der Pyramide nahe:

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} V_{Prisma}$$

Eine sehr ähnliche Methode wäre einen Würfel in sechs volumengleiche Pyramiden zu „zerschneiden".
Die Formel kann dann wie folgt hergeleitet werden: $\frac{1}{6} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} a}_{= h_{Pyramide}} \cdot \underbrace{a^2}_{Grundfläche}\right)$

$$\cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot a^2 = 1$$

- Natürlich lässt ebenfalls das Volumen der Pyramide mit geeigneten Modellen z. B. eines Prismas mit Hilfe von Umschütt- oder Wiegevorgängen herleiten. So dass man erkennt, dass das ~~Volumen der Py~~ Gewicht bzw. die befüllte Menge von Wasser einem drittel dem des Prismas entspricht

- Das Prinzip von Cavalieri (vgl. Prisma) würde sich ebenfalls zur Herleitung der Volumenformel

Anbieten würde man die Pyramide mit einem Kegel vergleichen der die gleiche Grundfläche u. Höhe besitzt.

$$V_{Pyramide} = V_{Kegel}$$

Aufgabe 3)

3.1 Sachanalyse

Den Wortlaut des Prinzip des Cavalieri (1) möchte ich an dieser Stelle nicht nochmal wiederholen, da dieser in Teilaufgabe 1. bereits niedergeschrieben steht.

3.2 Methodisch didaktische Analyse

Das Prinzip des „C" ist ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts, da sich mit Hilfe dieses Prinzips die Volumengleichheit verschiedener Körper sehr leicht erklären lässt. Die Schüler akzeptieren dieses Prinzip und können so z.B. die Volumengleichheit der Pyramide und des Kreiskegels relativ leicht verstehen.

In der Schule kommt das Prinzip des C. häufig zur Anwendung. Bsp.

- $V_{Quader} = V_{Prisma}$ (klar)
- $V_{Pyramide} = V_{Kegel}$ (klar)

- $V_{Halbkugel} = Volumen_{Zylinder} - V_{Kegel}$

In meiner Unterrichtseinheit soll das Prinzip des „C." später mit der Tatsache gezeigt werden, dass ~~die~~ wenn zwei Körper ~~mit gleicher Grundfläche und Höhe~~ in ~~gleicher~~ jeder die gleiche Grundfläche besitzen (und bei gleicher Grundfläche ~~[illegible]~~, Höhe) dass sie dann volumengleich sind.

Die Unterrichtseinheit soll eine „Einführungsstunde" zum Thema des Prinzip des C in der 9. Klasse sein. Wobei schließlich gezeigt wird dass das Volumen des Quaders mit dem eines Prismas übereinstimmt.

Dabei ~~werde ich mich hinsichtlich des Stundenablaufs~~ *

Sollen im Verlauf der Stunde auch enaktive, ikonische und symbolische Phasen (vgl. Stundenablauf) gegeben sein.

3.3 Lernzielanalyse

3.3.1 Lernvoraussetzungen:

- Die Schüler können das Volumen vom Quader berechnen
- Die Schüler sind mit Grundlegenden Begriffen, ihnen bereits bekannten Körper (Würfel, Quader) vertraut
- Die Schüler können Schrägbilder zeichnen.

3.3.2 Grobziele

- Herleitung der Volumenformels des Prismas
- Verständnis des Prinzips von Cavali.

3.3.3 Feinziele

- Verbesserung der Fähigkeiten der Schüler im Umgang mit Körpern
- Das Räumliche Denken soll geschult werden.

3.4 Stundenverlauf

- Zu Beginn der Stunde werde ich zwei Vollmodelle eines Quaders und eines „völlig" schiefen Prismas, die volumengleich sind der Klasse ~~vorstellen~~ zeigen und die Frage in den Raum „werfen" ob jemand über diese beiden Körper etwas ~~da~~ Aussagen käme?

Nachdem die Reaktion der Schüler sehr geteilt sind und ~~jemand da~~ ein Schüler das Volumen beider Körper ausgesprochen hat, werde ich die Frage stellen ob man irgendeine ~~Aussage~~ Aussage hinsichtlich des Volumens treffen kann ...?

Wieder sind die Meinungen geteilt ...

- Daraufhin werde ich ein Modell (vgl. Skizze) auf das Pult stellen, welches aus zwei Stapeln von Bierdeckeln besteht, wobei die Bierdeckel in der Mitte ein kleine Loch haben wodurch eine Schnur gezogen ist.

Die Stapel der beiden Bierdeckel sind etwa genauso verformt wie die von mir zunächst gezeigten Vollmodelle (Quader/schiefes Prisma).

Anschließend habe ich vor einige Schüler nach vorne die, ~~das Bode sch~~ die das „schiefe Prisma"-stapel beliebig verformen sollen (enaktiv)

~~d~~ Dadurch merken die Schüler, egal wie sie den Körper Verformen, das Grundsätzliche Volumen bleibt gleich.

Aus Zeitmangel kann ich den Rest der Stunde nur noch skizzieren.

- Als nächste würde der Begriff des Prismas eingeführt an die Tafel geschrieben + Hefteintrag + Zeichnung eines Prismas + Quader (chemisch)

- Dann erfolgt die Herleitung der Volumenformel dabei würde ich auf das Prinzip d. C. eingehen (jeder Bierdeckel stellt einen ebenen Schnitt in gleicher ~~Ho~~ Höhe dar...)

- Nachdem die Schüler die Herleitung verstanden u. akzeptiert haben würde ich das Prinzip des C. nochmal etwas genauer erläutern ~~...~~ u. niederschreiben lassen.