

zu 1.)

Def.: Körper

Jeck Unter einem Körper versteht man jede dreidimensionale Punktmenge des dreidimensionalen Raums, die durch endlich viele ebene oder gekrümmte Flächenstücke begrenzt wird.

Die Begrenzungsflächen gehören zum Körper.

Man kann zwischen ebenflächigen Körpern und krummflächigen Körpern unterscheiden. Ein ebenflächiger Körper wird von ebenen Flächenstücken begrenzt und auch polyeder genannt. Ein krummflächiger Körper wird nur oder auch von krummen Flächen begrenzt.

Bsp.: ebenflächiger Körper: - Prisma, Spat, Quader, Würfel

- Pyramide, Pyramidenstumpf

- ~~platon~~ platon. Körper (Tetraeder, Oktaeder, ~~Würfel~~ Würfel, ...)

krummflächiger Körper: - Kugel

- Zylinder, Kegel, Kegeltumpf

Def.: Volumen Oberfläche

~~Die Größe der~~ Die Vereinigung aller Begrenzungsflächen heißt Oberfläche des Körpers.

Unterteilung: - : Grundfläche, Deckfläche, Mantelfläche

↳ (parallele Fläche zur Grundfläche)

↳ alle Flächen die ~~weder~~ weder Deck noch Grundfläche sind

Def.: Oberflächeninhalt

Summe der Inhalte der einzelnen Begrenzungsflächen des Körpers.

Def.: Volumen

Die Größe des von der Oberfläche des Körpers komplett umschlossenen Teil des Raumes nimmt man Rauminhalt oder Volumen des Körpers.

Bestimmung der ~~Größe~~ Größe des ^{eines Körpers} Volumens zuerst durch Vergleich mit einem bekannten Volumen eines Körpers, meist Einheitswürfel mit seiner Länge 1.

Einem Körper K wird eine reelle Zahl $V(K)$ als Maßzahl des Volumens zugeordnet, so dass:

- 1) Positivität: $V(K) > 0$
- 2) Additivität: $V(K_1 \cup K_2) \Leftrightarrow V(K_1) + V(K_2)$ für $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
- 3) Invarianz: $K_1 \cong K_2 \Leftrightarrow V(K_1) = V(K_2)$
- 4) Normiertheit: $V(W) = 1$ W entspricht normierter Würfel mit Seitenlänge 1

Def.: Prisma

Einen ebenflächigen Körper nennt man Prisma, wenn er begrenzt wird, durch

- 1) Zwei kongruente zueinander parallele n -Ecke
(Grund- und Deckfläche)
- 2) n Parallelogramme, die die n -Ecke miteinander verbinden.

A) Herleitung der Volumenformel für Prismen:

a) ^{qualitativ} ~~analytisch~~ Durch Umfollversuche:

Man nimmt einen Quader, dessen Volumenformel bereits bekannt ist und ein beliebiges Prisma mit gleichen Grundflächeninhalt wie der Quader und gleicher Höhe. Durch Umschütten des ~~Wassers~~ von Wasser von Prisma in Quader $\Rightarrow V_{\text{Quader}} = V_{\text{Prisma}}$

$V_{\text{Prisma}} = G_{\text{Prisma}} \cdot h$ entsteht als Vermutung.

Kann mit mehreren Prismen überprüft werden, die gleiche Höhe h wie Qu und gleichen Grundflächenformen, also verschiedene n -Ecke als Grundfläche haben.

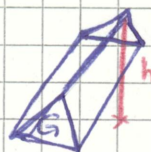
* Unterscheidung gerader und schiefer Prisma

gerader Prisma: Seitenkanten nicht senkrecht auf Grundfläche

schiefes Prisma: Seitenkanten nicht senkrecht auf Grundfläche

Regelmäßiges Prisma: Grund- und Deckfläche sind regelmäßige n -Ecke

Volumen Prisma: $V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$



Def.: Pyramide

Ein ebenflächiger Körper heißt Pyramide, wenn es

begrenzt wird durch

1) ein n -Eck

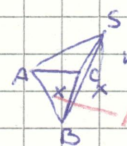
2) durch n Dreiecke, die alle einen gemeinsamen Punkt S außerhalb der n -Ecksfläche gemeinsam haben

Unterscheidung: gerade Pyramide

schiefe Pyramide



Lot von S auf $\triangle ABC$ steht senkrecht auf Mittelpunkt von $\triangle ABC$.

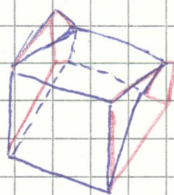
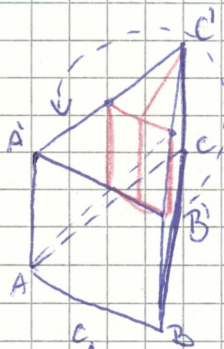


~~Lot~~ von S auf $\triangle ABC$ steht nicht senkrecht auf $\triangle ABC$.
[S, MP] steht nicht senkrecht auf $\triangle ABC$.

regelmäßige Pyramide: regelmäßiges n -Eck als Grundfläche

b) ikonisch: Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit

1) Ein dreieckiges Prisma wird durch zwei zur Grundfläche ~~para~~ senkrechte Schnitte so zerlegt, dass es zu einem Quader umgebaut werden kann.



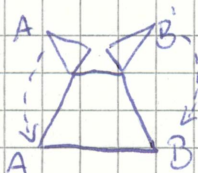
Draufsicht



[AC] und [BC] werden von Schnitten

halbiert

umklappen



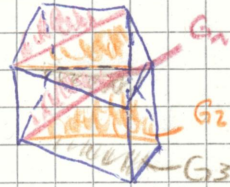
Man erhält also $V_{\text{Quader}} = V_{\text{Prisma}} = G_{\text{Prisma}} \cdot h$

da Zerlegungsgleich, dies gilt für dreiseitige Prismen.

bei Bannier und auf Seite, dass jedes n -Eck in $n-2$

Dreiecke zerlegt werden kann, gilt:

Jedes n -seitige Prisma, kann in $n-2$ 3-dreieitige Prismen mit gleicher Höhe h zerlegt werden



$$V_{\text{Prisma}} = V_1 + V_2 + V_3 =$$

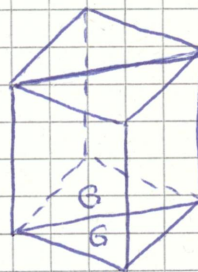
$$= G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h = (G_1 + G_2 + G_3) \cdot h =$$

$$= G_{\text{Prisma}} \cdot h$$

Somit gilt V_{Prisma} für alle Prismen mit n -Eck der Grundfläche, also alle n -seitigen Prismen

hierbei:

- 2) ausgehend von einem rechtwinkligen Prisma kann man sagen, dass jeder rechtwinkligen dreiseitigen Prisma durch Ergänzung eines kongruenten rechtwinkligen dreiseitigen Prismas zu einem Quader mit doppeltem Volumen des Ausgangsprismas ergänzt werden kann.

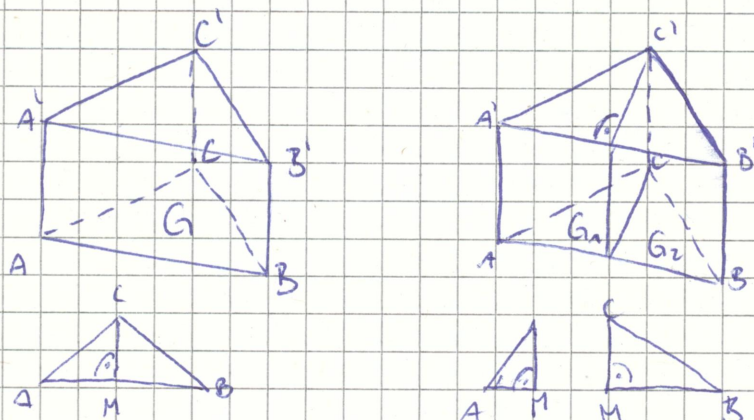


$$V_{\text{Quader}} = 2 V_{\text{Prisma}}$$

$$V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{2} V_{\text{Quader}} = \frac{1}{2} (2 \cdot G \cdot h) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) G \cdot h = G \cdot h$$

Damit gilt $V_{\text{Prisma}} = G_{\text{Prisma}} \cdot h$ für rechtw.-dreiseitigen Prismen.

Jedes dreiseitige Prisma, kann in zwei rechtwinklige dreiseitige Prismen zerlegt werden.



$$V_{\text{Prisma}} = V_1 + V_2 = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h = (G_1 + G_2)h = G \cdot h$$

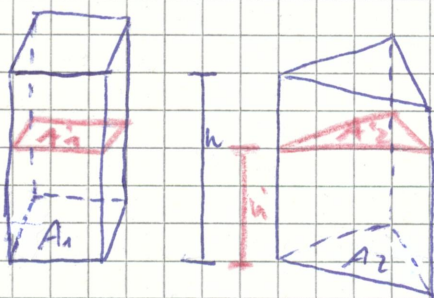
Somit gilt es für alle dreiseitigen Prismen.

Das wie man zeigt, dass es für n -seitigen Prismen gilt sie unterpunkt 1)

g) symbolisch: Mit Prinzip von Cavalieri (Def.: siehe zu 2)c)

Man nimmt einen Quader und einen ein Prisma, die beide gleiche Höhe und gleichen Grundflächeninhalt besitzen.

Annahme $A_1 = A_2$ und bei Körper gleiche Höhe h



Man kann sich die Körper durch Parallelverschiebung der

Grundflächen entstanden denken, also ist $A'_1 = A_1$ und

$A'_2 = A_2$ für alle Höhen h_i

da $A_1 = A_2 \Rightarrow \underline{A'_1} = A_1 = A_2 = \underline{A'_2}$ gilt das Prinzip von Cavalieri und die Körper haben gleiches Volumen.

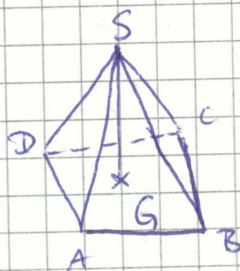
Vaeder = Vprisma

$$V_{\text{prisma}} = V_{\text{aeder}} = A_1 \cdot h = \underline{A_2 \cdot h}$$

Mit Cavalieri kann auch gezeigt werden, dass das Volumen von geraden und schiefen Prismen, die gleiche Grundflächen^{inhalt} und ~~unter~~ gleiche Höhen haben, gleich ist.

Herleitung von Volumenformel für Pyramiden:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$$



eraktiv: Umpfüllversuche:

Man nimmt einen Quader und eine Pyramide, die beide dieselben Grundflächeninhalte und die gleichen Höhen besitzen.

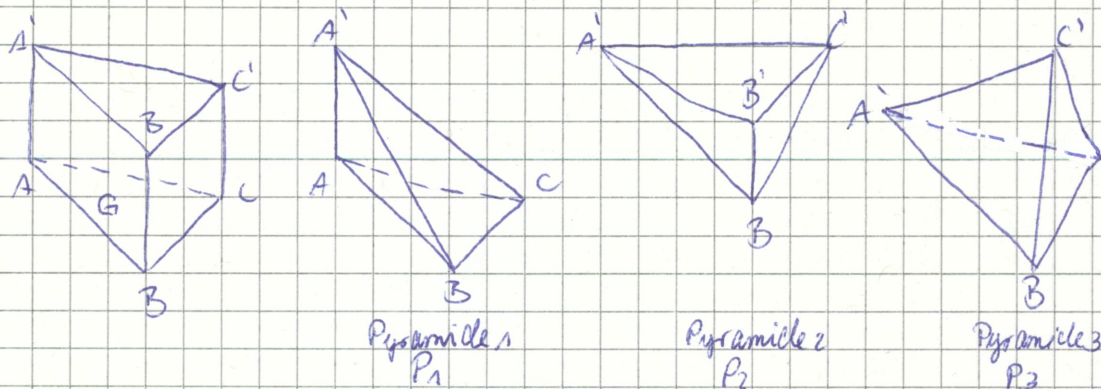
Beide sind Hohlkörper. Füllt man die Pyramide mit Wasser und schüttet das Wasser in Quader $\Rightarrow$ Quader $\frac{1}{3}$ mit Wasser voll.

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} V_{\text{Quader}} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Vermutung als Formel; kann Vermutung kann bekräftigt werden durch Versuche mit weiteren Pyramidenhohlkörpern mit gleicher Höhe und gleichen Grundflächeninhalt, aber unterschiedlichen n-Ecken als Grundflächen.

ikonisch: durch Zerlegungsgleichheit

Jedes dreiseitiges Prisma kann in drei volumengleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt werden.



~~Pyramide 1 hat~~ $V(P_1) = V(P_2)$ da $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C$
 und $h = \overline{AA'} = \overline{BB'}$
 $\Rightarrow$ Cavalieri

$V(P_1) = V(P_3)$ da $\triangle ACA' \cong \triangle CCA'$
 und $h = \overline{BC}$
 $\Rightarrow$ Cavalieri

Damit $V(P_1) = V(P_2) = V(P_3)$

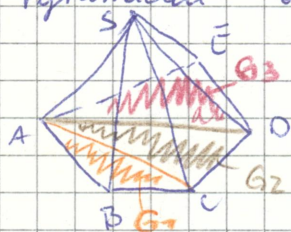
$V_{\text{Prisma}} = V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) = 3V(P)$

$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} V(P) = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} G \cdot h$

Gilt für dreiseitige Pyramide, jedoch aufgrund des

~~b) Man kann einen Würfel in sechs~~ in sechs, dass jedes n -Eck
 in $n-2$ Dreiecke zerlegt werden kann, gilt.

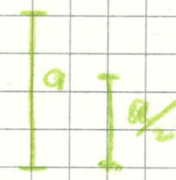
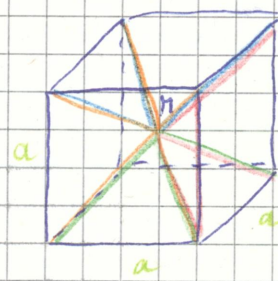
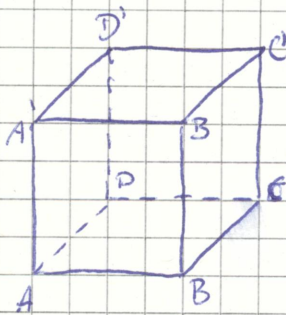
Jede n -seitige Pyramide kann in $n-2$ drei-
 seitige Pyramiden zerlegt werden.



$$V_{\text{Pyr.}} = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{3} G_1 \cdot h + \frac{1}{3} G_2 \cdot h + \frac{1}{3} G_3 \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} (G_1 + G_2 + G_3) \cdot h = \frac{1}{3} G \cdot h$$

b) Einen Würfel kann man in sechs volumengleiche, vier-
 seitige Pyramiden zerlegen.



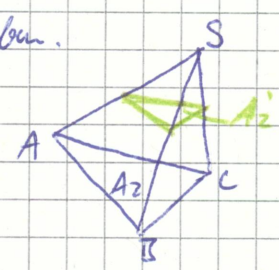
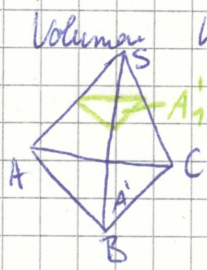
Alle Pyramiden haben Grundfläche $A = a^2$ und die Höhe h , da die Spitze immer der Mittelpunkt M des Würfels ist.

$$V_{\text{Würfel}} = 6 V_{\text{Pyramide}}$$

$$6 V_{\text{Pyramide}} = V_{\text{Würfel}} = 6 \cdot h = a \cdot a + \frac{a}{2} \cdot 2$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 2 = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} a \cdot h$$

g) Mit dem Prinzip von Cavalieri kann gezeigt werden, dass gerade und schiefe Pyramiden mit gleichen Höhen und gleichen Flächeninhalten der Grundflächen gleiches Volumen haben.



$$A_1 = A_2$$

$$h_1 = h_2$$

S kann als zentr. zentrischer Streckung gesehen werden

$$\frac{h_1}{h} = k \text{ Streckungsfaktor} \quad \frac{A_1'}{A_1} = k^2 \quad \frac{A_2'}{A_2} = k^2$$

$$\frac{A_1'}{A_2'} = \frac{A_1 \cdot k^2}{A_2 \cdot k^2} = \frac{A_1}{A_2} = 1 \quad \text{da } A_1 = A_2$$

Somit $A_1' = A_2' \Rightarrow$ Cavalieri erfüllt

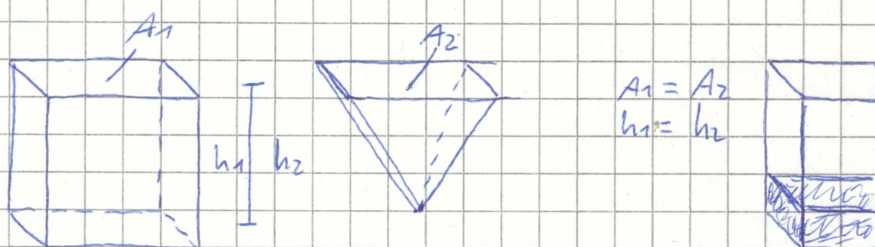
$\Rightarrow$ gerade und schiefe Pyramide gleiches Volumen

zu 2) In der 5. Jahrgangsstufe ~~haben~~ lernen die Schüler das Volumen von Quader und Würfel zu berechnen. In der 9. Jahrgangsstufe folgen mit der Raumgeometrie, die Volumina von Prisma, Pyramiden, geraden Zylinder, geraden Kegel, Pyramiden- und Kegelsumpf, sowie von der Kugel.

a) Die Behandlung der Volumenberechnungen sollte in folgenden Schritten erfolgen, enaktiv - thematisch symbolisch.

Im enaktiven sollen die Schüler durch Handeln eine Vorstellung von der Volumenformel bekommen. Dies geschieht beispielsweise durch Umschüttversuche oder wenn keine Hohlkörper vorhanden sind durch Verdrängung von Wasser durch einen Körper.

Bsp.:



schüttet Wasser aus voller Pyramide in Quader mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

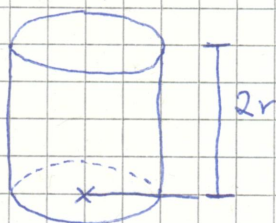
$\Rightarrow \frac{1}{3}$ des Quaders ist mit Wasser gefüllt

$\Rightarrow$ ^{Vermutung} ~~Annahme~~ bei Schüler entsteht, dass $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} V$
 $= \frac{1}{3} G \cdot h$

Vermutung wird bestätigt durch Durchführung mit verschiedenen Pyramidenhohlkörpern, die alle selben Inhalt der Grundfläche und selbe Höhe haben, aber

unterschiedliche Formen, also unterschiedliche n -Ecke als Grundfläche haben.

~~Wasser~~ Kugel ^{ist} beispielsweise kein Hohlkörper, daher nimmt man Zylinder mit Grundfläche $2r^2\pi$ und Höhe $h=2r$, sowie Kugel mit Radius r .



Zylinder wird voll Wasser gefüllt, und Kugel komplett in Zylinder gedrückt. An-

schließend wird Kugel herausgenommen. $\frac{2}{3}$ des Wassers sind aus Zylinder verdrängt worden.

$$\Rightarrow V_{\text{Kugel}} = \frac{2}{3} V_{\text{Zylinder}} = \frac{2}{3} G \cdot h = \frac{2}{3} \cdot r^2 \pi \cdot 2r = \frac{4}{3} r^3 \pi \quad \text{entsteht als Vermutung für Formel.}$$

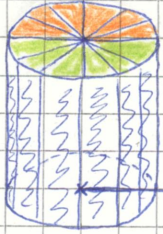
- b) Dann sollen Schüler ~~ihre~~ ^{den} ~~ihre~~ ^{den} die Volumenberechnung erfahren. Hierbei wird das Volumen mit bereits bekannten und berechenbaren Volumina verglichen.

Hier spielen ergänzungs- und zerlegungsähnliche Figuren eine wichtige Rolle. Die ~~2~~

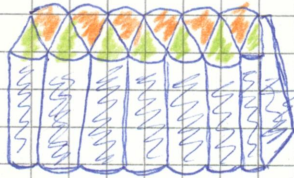
Als Beispiel kann die bereits in zu 1) A) B) behandelten Ergänzung- und Zerlegungsverfahren zur Volumenberechnung von Prismen oder die in zu 1) B) B) behandelten Verfahren zur Volumenberechnung von Pyramiden, Ketten- gezogen werden.

Ein weiteres Beispiel stellt die Volumenberechnung an einem geraden Kreiszylinder dar.

sie kann ikonisch durch Zerlegung erfolgen.



Zylinder wird durch Schnitte durch
Aben in 12 Teile (kongruent) zerschnittener
Teile werden neu angeordnet



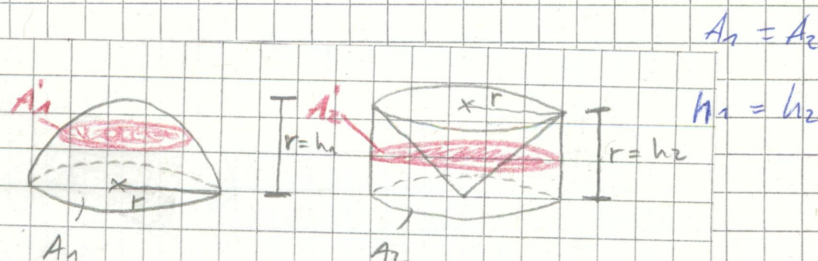
$\Rightarrow$ Zylinder kann angenähert
werden durch $V_{\text{Zylinder}} = r \cdot r \cdot \pi \cdot h$
in je mehr Teile Zylinder zerlegt
wird, desto besser wird Annäherung.

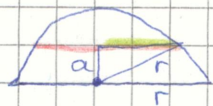
1) Als letztes erfolgt der symbolische Aspekt. Hier soll
formal begründet werden, warum die Volumenformel
gültig ist. Gemeint ist hier ^{Satz des} ~~das~~ ~~Prinzip~~
Cavalieri, welcher besagt:

Def.: Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn sie, mit gleich
großen Grundflächen auf ein und dieselbe Ebene gestellt,
von jeder Parallelebene in inhaltsgleichen Flächen geschnitten
werden.

Beispiele für den Einsatz im Unterricht bei der Volumen-
berechnung siehe zu 1) A, y) und zu 1) B, y).

Eine weitere Einsatzmöglichkeit ist die Volumenberechnung
der Halbkugel. Dieses Volumen wird mit dem eines
Zylinders mit gleicher Grundfläche $r^2 \pi$ und Höhe r verglichen,
aus dem ein Kegel ausgebohrt ist.

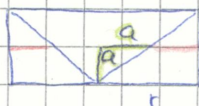




$$A_1' = s^2 \cdot \pi$$

$$s^2 = r^2 - a^2$$

$$A_1' = (r^2 - a^2) \pi$$



$$A_2' = r^2 \pi - a^2 \pi$$

$$A_2' = (r^2 - a^2) \pi$$

$$\Rightarrow A_1' = A_2'$$

$\Rightarrow$ Cavalieri gilt

$$\Rightarrow V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Körper}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} = 2r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi =$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$V_{\text{Kugel}} = 2 \cdot V_{\text{Halbkugel}} = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

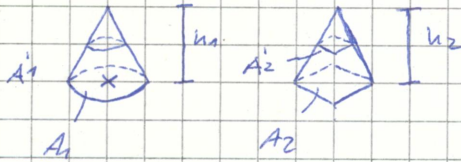
zu 3)

1) Sachanalyse

Satz des Cavalieri:

Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn sie mit gleich großen Grundflächen auf ein und dieselbe Ebene gestellt, von jeder Parallelebene in inhaltsgleichen ~~Flächen~~ Flächen geschnitten werden.

- $\Rightarrow$ - Körper müssen inhaltsgleiche Grundflächen besitzen
 - Körper müssen gleiche Höhe haben
 - Die Schnittflächen ~~der beiden Körper~~, die bei einem Ebenenschnitt, parallel zu den Grundflächen, entstehen, der beiden Körper, müssen inhaltsgleich sein
- $\Leftrightarrow K_1$ und K_2 haben gleiches Volumen



$$h_1 = h_2$$

$$A_1 = A_2$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

2) Einordnung in den Lehrplan

Der Satz von Cavalieri wird in der Jahrgangsstufe unter dem Punkt „Raumgeometrie“ behandelt.

3) Vorwissen

Die Schüler können Volumen von Rechteck, Quader und Prisma bereits berechnen.

4) Verlauf der Stunde / Didaktische Analyse

Im Folgenden sollen der Stundenverlauf und die didaktische Analyse gemeinsam bearbeitet werden; daher steht links steht der Verlauf, rechts die didaktische Analyse.

Grobziel: Die Schüler sollen das Cavalieri'sche Prinzip ~~mit~~ in eigenen Worten erklären können.

I. Motivation

Feinziel: Die Schüler sollen sensibilisiert werden, ~~für~~ dass der Körper aus Schichten mit best. Höhen bestehen.

Der Lehrer zeigt Schülern ein Bild
von einem Berg aus einem Atlas,
auf den er durch eingezeichnete
Höhenebenen dargestellt ist
(stummer Impuls)

mathematisch modellieren
kommunizieren und werden
gefordert

Schüler diskutieren und kommen
darauf, dass Höhenebenen Schichten

mit einer best. Dicke sind.

Erarbeitung: Feinziele *

Lehrer verteilt ~~Berg~~ Styropor und
in Gruppen
Berg wird nachgebaut

mathematisch argumentieren
kommunizieren

(einfacher Berg, damit es nicht zu
lang dauert). Schüler stellen fest,
dass ^{das} ~~sich~~ Volumen des Bergs
~~nicht verändert, wenn man~~

~~Schichten vertauscht~~ durch die verschie-
denen Schichten erzeugt wird.

Sie bemerken, dass ein Vertauschen
der Schichten das Volumen nicht
verändert.

Lehrer gibt Schülern Prismen
aus Knetmasse. Schüler schneiden
Prismen in gleiche Dicke schneiden,
Parallel zur Grundfläche

mathematisch argumentieren
kommunizieren

* Die Schüler sollen sich der Grundideen des Cavalieri'schen
Prinzips bewusst werden.

Diese Scheiben werden nun von den Schülern verformt, unter der Vorgabe, dass Höhe der einzelnen Schichten gleich bleiben muss. Anschließend wieder zusammensetzen.

Scheiben müssen haben gleiches Volumen, die Knetmasse gleiche Menge, selbe Höhe gleich
 $\Rightarrow$ Alle Schichten müssen gleichen Grundflächeninhalt haben.

III. Schluss- u. Vertiefungsphase

Feinziel: Die erkannten Grundprinzipien der Cavalieri'schen Prinzipien werden gefestigt

Lehrer fasst mit gezielten Fragen, die entdeckten Inhalte zusammen.

Mathematisch argumentieren
kommunizieren

Körper gleicher Flächeninhalt der Grundfläche und gleiche Höhe und die von parallelen Ebenen herausgeschnittenen Flächen gleiche Inhalte haben, sind Volumina der Körper gleich.

5) Schwierigkeiten:

- Schüler wissen nicht mehr, dass Volumen von Grundfläche und Höhe abhängt
- Schüler haben Probleme sich vorzustellen, dass Körper in infinitesimal dünne Scheiben aufgeteilt werden kann.
- Schüler haben Schwierigkeiten, das Cavalieri'sche Prinzip nachzuvollziehen.
- Schüler kennen Bedeutung von Höhenlinien nicht