

Thema Nr. 1

①

Eine Figur heißt symmetrisch, wenn sie durch eine nicht-identische Kongruenzabbildung auf sich selbst abgebildet werden kann.

Symmetrie bezieht sich daher auf die Eigenschaft einer Figur.

Die Relation zwischen zwei Figuren wird hingegen als Kongruenz bezeichnet. Zwei Figuren sind kongruent, wenn sie durch Kongruenzabbildungen aufeinander abgebildet werden können.

Kongruenzabbildungen, auch Isometrien oder Bewegung genannt, sind Abbildungen, die die Größe und Form einer Figur erhalten, d.h. sie sind ~~ist~~ abstands-, ~~Winkel~~- und Längentreu.

Es gibt vier verschiedene Kongruenzabbildungen: Achsen-
spiegelung, Verschiebung, Drehung und Schubspiegelung (* Seite 2)

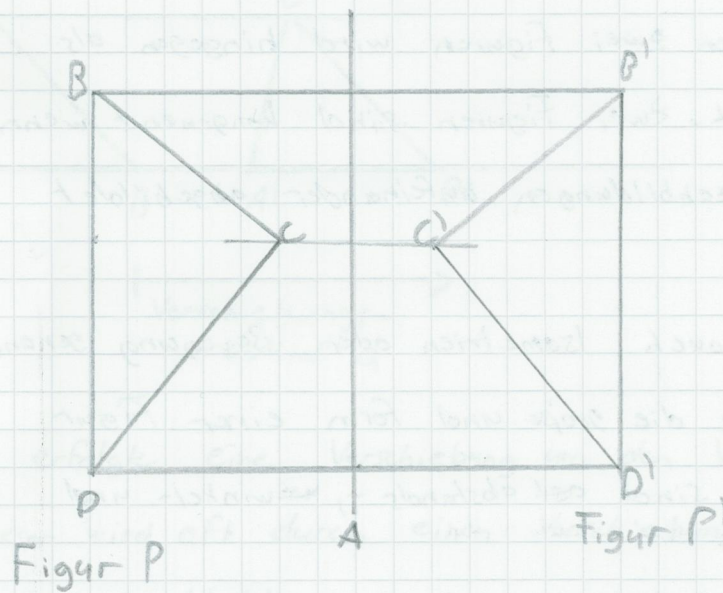
Diese Kongruenzabbildungen führen wiederum zu den Symmetriearten: Achsensymmetrie, Verschiebungssymmetrie, Drehsymmetrie und Schubspiegelsymmetrie. Im Folgenden sollen die verschiedenen Kongruenzabbildungen und durch sie entstehenden Symmetriearten näher erläutert werden.

2

1. Achsenspiegelung / -symmetrie

a) Achsenspiegelung

Werden die Punkte P einer Figur auf die Bildpunkte P' abgebildet, so dass diese Bildpunkte bezüglich einer Achse A symmetrisch zu den Punkte P sind, nennt man diese Abbildung eine Achsenspiegelung. Im Folgenden eine Achsenspiegelung am Beispiel eines Dreiecks:



* Alle Kongruenzabbildungen können durch eine Hintereinanderschaltung von höchstens drei Kongruenzabbildungen ersetzt werden. Dies wird jeweils bei der genauen Beschreibung jedes ...

Die Achsenspiegelung den Umlaufsinn um:

3

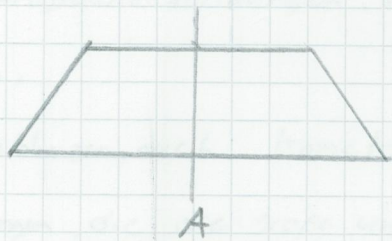
$\triangle BCD$: Umlaufsinn im Uhrzeigersinn

$\triangle B'C'D'$: Umlaufsinn gegen den Uhrzeigersinn.

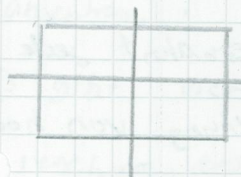
* Alle Fixpunkte, das heißt diejenigen Punkte, die bei der Spiegelung unverändert bleiben, befinden sich auf der Achse A .

b) Achsensymmetrie

Eine Figur heißt achsensymmetrisch, wenn sie durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann. Das gleichschenklige Trapez ist zum Beispiel achsensymmetrisch:

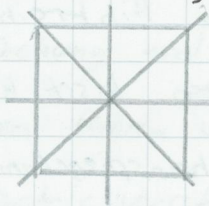


Es gibt auch Flächen, die zweifach



achsensymmetrisch

(wie das Rechteck) oder noch öfter



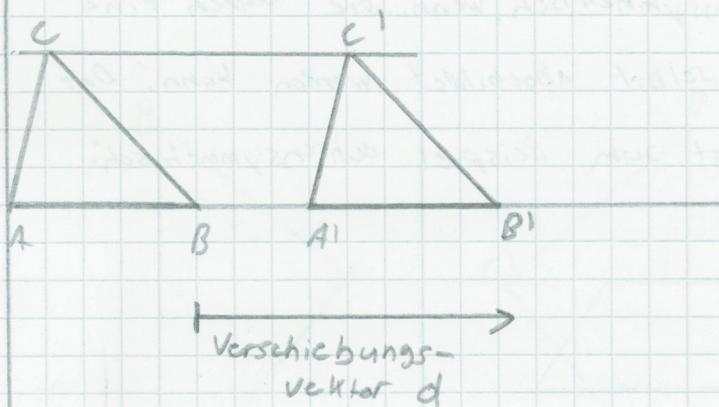
(wie das Quadrat 4-fach) sind.

Die Achsen zu denen die Figuren symmetrisch sind, heißen Symmetrieachsen.

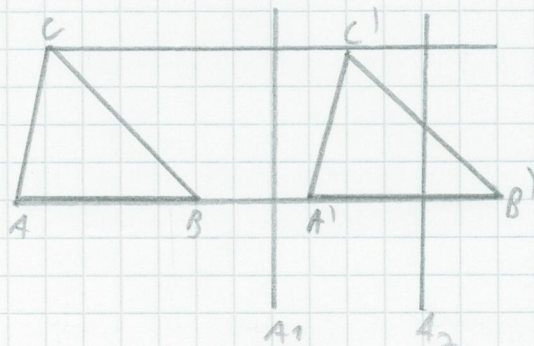
2) Verschiebung / -Symmetrie

a) Verschiebung

Werden alle Punkte einer Figur gleich weit in dieselbe Richtung verschoben, so nennt man diese Abbildung eine Verschiebung. Im Folgenden die Verschiebung am Beispiel eines Dreiecks:



Es erfolgte eine Verschiebung um den Verschiebungsvektor d , dieser wird oft durch einen Verschiebungspfeil angegeben. Der Umlaufsinn bleibt gleich. Da sich wie bereits erwähnt jede Kongruenzabbildung als eine Hintereinanderschaltung von höchstens drei Achsenspiegelung ersetzen lässt, kann man eine Verschiebung auch als eine Zweifachachsenspiegelung an zwei parallelen Achsen ersetzen. Der Abstand der parallelen Achsen ist halb so groß wie der Verschiebungsvektor. An unserem Bsp. angewandt:



b) Verschiebungssymmetrie

5

Eine Figur heißt verschiebungssymmetrisch, wenn sie durch eine Verschiebung auf sich selbst abgebildet werden kann. Ein Beispiel für eine Verschiebungssymmetrische Figur ist das unendliche Ornament:

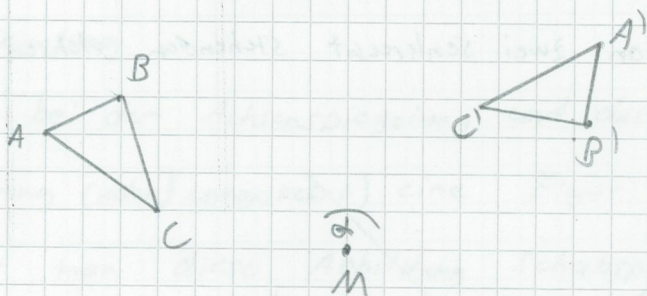


c) Drehung/Drehsymmetrie

a) Drehung wird

wenn die Punkte einer Figur auf einem Kreis um den Punkt M um einen Winkel α verschoben, so entsteht eine Bildfigur diese Abbildung nennt man Drehung.

Im Folgenden soll eine Drehung anhand eines Dreiecks dargestellt werden:



Drehung um
den Winkel $\alpha =$
 120°

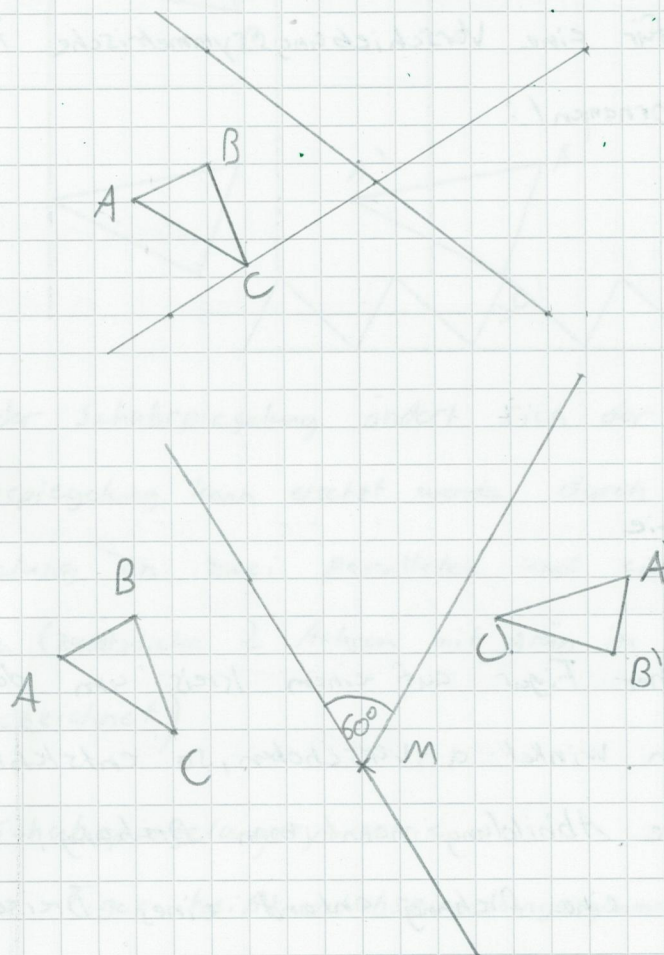
Der Fixpunkt ist der Drehpunkt M .

Bei einer Drehung ändert sich der Umlaufsinn nicht.

Eine Drehung kann durch eine zweifachspiegelung an zwei sich schneidenden Achsen ersetzt werden. Die Achsen

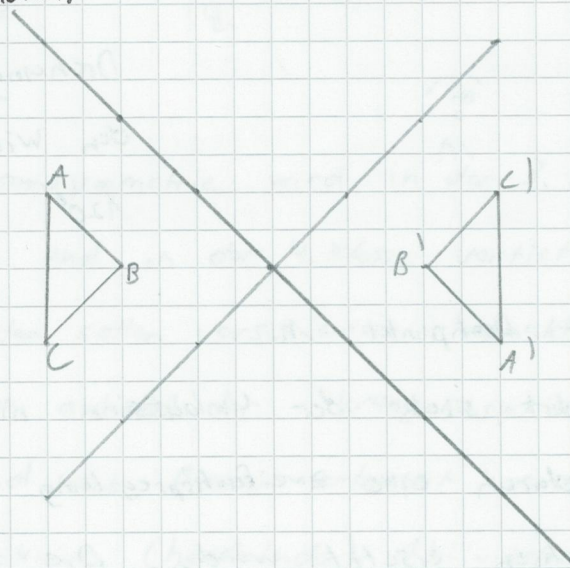
6

Schneiden sich in einem Winkel, der halb so groß wie der Drehwinkel ist.



Achsen schneiden
sich im Winkel
 $\beta = 60^\circ$

Eine Sonderform der Drehung ist die Punktspiegelung. Hierbei handelt es sich um eine Drehung um 180° , die durch eine Zweifachspiegelung an zwei senkrecht stehenden Achsen ersetzt werden kann.

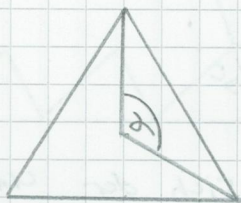


b) Drehsymmetrie

7

Eine Figur heißt drehsymmetrisch, wenn sie durch eine Drehung auf sich selbst abgebildet werden kann.

Ein Beispiel für eine drehsymmetrische Figur ist das gleichseitige Dreieck:



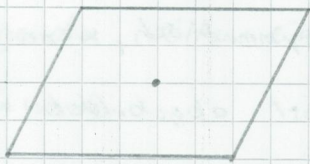
Es ist drehsymmetrisch

zum Winkel $\alpha = 60^\circ$

Eine Sonderform der Drehsymmetrie ist die Punktsymmetrie.

Eine Figur ist punktsymmetrisch, wenn sie durch eine Punktspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann. Ein

Beispiel für eine punktsymmetrische Figur ist das Parallelogramm:



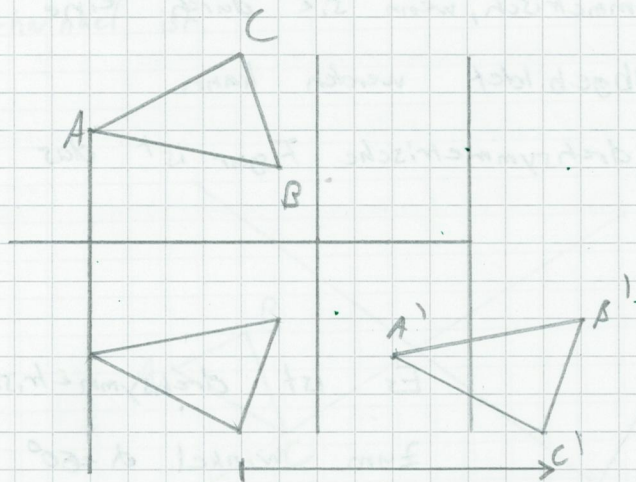
↳ Schubspiegelung / Schubspiegelungssymmetrie

a) Schubspiegelung

Entsteht bei der Achsenspiegelung und darauffolgender Verschiebung (oder umgekehrt) eine Figur eine Bildfigur,

so nennt man diese Abbildung Schubspiegelung.

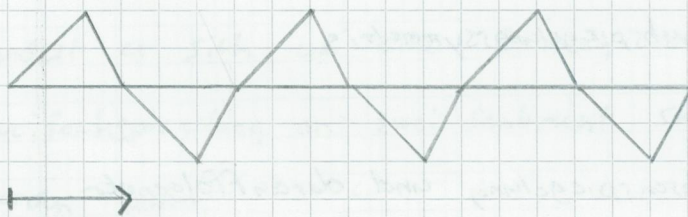
Eine Schubspiegelung am Beispiel eines Dreiecks:



Bei der Schubspiegelung ändert sich der Umlaufsinn. Eine Schubspiegelung kann ersetzt werden durch eine Dreifachachsen-Spiegelung an zwei parallelen und einer dazu senkrechten Achse. (zusätzliche 2 Achsen mit grün in vorhergehender Zeichnung eingezeichnet)

b) Schubspiegelungssymmetrie

Eine Figur heißt schubspiegelungssymmetrisch, wenn sie durch eine Schubspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann. Ein Beispiel ist dieses unendliche Ornament:



②

Die Achsensymmetrie wird in der 3. Klasse der Grundschule eingeführt und in der 4. Klasse vertieft.

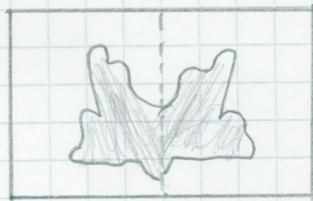
Im Folgenden sollen verschiedene Lernaktivitäten zur Achsensymmetrie anhand der Herangehensweise an einen Unterrichtsgegenstand nach Bruner erläutert werden. Zuerst werden also enaktive (handelnde) Aktivitäten beschrieben, anschließend

end ibonische und abschließend Aktivitäten auf symbolischer Ebene.

9

1) Aktivitäten auf enaktiver Ebene

Eine Möglichkeit zur Einführung der Achsensymmetrie sind die Klecksbilder. Diese entstehen indem man ein Blatt in der Mitte knickt, auf eine der beiden Seiten Tinte gibt und das Blatt anschließend in der Mitte zusammenfaltet.



Anhand der Klecksbilder lässt sich gut erarbeiten, dass die linke ~~Seite~~ Hälfte kongruent zur rechten Hälfte ist und sich entlang der Faltlinie die Symmetrieachse befindet.

Eine weitere Möglichkeit ist das Falten und anschließende Schneiden an der Faltkarte. Faltet man das Papier wieder auf erhält man eine achsensymmetrische Figur. Beim Schneiden ist besser als bei dem Klecksbildern gewährleistet, dass die beiden Hälften 100% zueinander kongruent sind, nachteilig ist, dass die Symmetrieachse sozusagen „weggeschnitten“ wurde. Eine weitere enaktive Aktivität ist das Legen.

Es kann entweder mit Flächenformen (z.B. Quadrat, Rechteck, Dreieck, ...) oder Stäbchen gelegt werden. Zur Kontrolle ob die gelegte Figur wirklich achsensymmetrisch ist, kann ein randloser Taschenspiegel dienen. Dieser wird an der Symmetrieachse angelegt. Sieht das Bild im Spiegel wie die daneben gelegte Hälfte, ist die Figur achsensymmetrisch. Mit dem randlosen Spiegel eröffnen sich auch noch weitere Übungsformen. Zum Beispiel kann man das Bild einer Uhr nehmen und versuchen die Zeiger durch geschickter Anlegen verschwinden zu lassen oder untersucht andere Bilder (z.B. Frontansichten von Autos, Schmetterlinge, Pflanzenblätter, Blüten usw.) auf Achsensymmetrie. Eine weitere enaktive Möglichkeit ist das Spannen auf dem Geobrett. Hier können Figuren gespannt und auf Achsensymmetrie untersucht werden. Dies kann erneut mit Hilfe des Spiegels oder Abzählen der Entfernung von der vermeintlichen Symmetrieachse (mithilfe der Nägel) erfolgen. Das Auffinden von Achsensymmetrie in der Umwelt spielt ebenfalls eine große Rolle. Jedes Kind kann beispielsweise etwas achsensymmetrisches von Zuhause mitbringen und im Unterricht vorstellen. Auch der eigene Körper bietet die Möglichkeit über Achsensymmetrie zu reden. Dazu könnten sich die Kinder beispielsweise auf große Papierbahnen legen, dann werden ihre Umrisse gezeichnet und anschließend sucht man die Symmetrieachse innerhalb des eigenen Körpers. Oder man fotografiert die Gesichter der Kinder und sucht ebenfalls die Symmetrieachse. Weiterhin kann man auch achsensymmetrische Bewegungen von den Kindern machen lassen, z.B. Hampelmann. Dies ist eine gute Fächerübergreifung zu Sport.

Aktivitäten auf der ^{ikonischen} ~~harmonischen~~ Ebene

Auf der ikonischen Ebene besteht zunächst die Möglichkeit die gelegten oder gespannten Figuren abzuzeichnen.

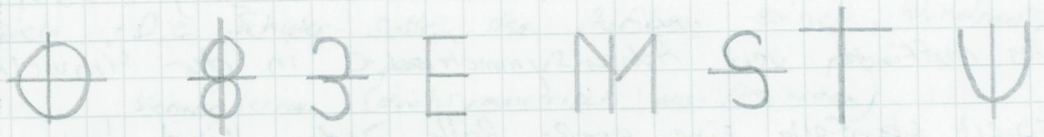
Außerdem kann man in Bildern die Symmetrieachse finden.

Eine andere Möglichkeit ist das Fertigzeichnen achsensymmetrischer Figuren, z.B. wenn nur eine Seite gegeben ist.

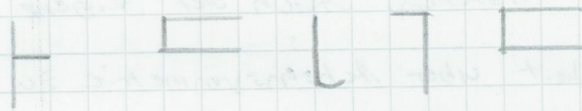


Das Zeichnen lässt sich auch gut in Partnerarbeit machen, in Partner zeichnet vor, der andere ergänzt zu einer achsensymmetrischen Figur.

Auch Buchstaben und Zahlen lassen sich auf Achsensymmetrie hin untersuchen.



Mithilfe dieser können Geheimschriften erstellt werden.



Aktivitäten auf symbolischer Ebene

Auf symbolischer Ebene kann versucht und geübt werden

Achsen Spiegelungen „halber“ Figuren im Kopf durchzuführen. Zum

Beispiel: wenn bei der zuvor beschriebenen Geheimschrift nicht auf Papier ergänzt, sondern der Lehrer an der Tafel oder

am Overhead-Projektor eine gezeigte Geheimschrift zeigt und die Kinder diese im Kopf lösen. Gedankliche Spiegeln oder

3.

Sachanalyse: siehe 1. 3) Drehung.

LP: 4. Klasse Drehsymmetrie (Drehung)

Lernvoraussetzungen:

Die Kinder kennen einfache Flächenformen aus der 1. Klasse, das in der Stunde verwendete Dreieck ist daher bekannt.

Außerdem kennen sie unbewusst drehsymmetrische Figuren aus ihrem Alltag und ihrer Umwelt. In einer vorhergehenden Stunde wurde anhand von gebastelten Weihnachtssternen und mitgebrachten Windrädern u. Ä. erste Eigenschaften der Drehsymmetrie vermittelt.

Didaktische Analyse:

Das Thema der Stunde ist die Entstehung von Windrädern durch das Drehen von Dreiecken. Zunächst werden die Windräder nur ausgelegt, anschließend sollen die Schüler ihre eigenen Windräder erstellen. Das Auslegen und Entwerfen findet in Einzelarbeit statt damit jeder auf seinem eigenen Niveau arbeiten kann.

Differenzierung:

Differenzierung erfolgt beim ersten Arbeitsabschnitt durch die Kärtchen, die unterschiedliche auszulegenden Windräder abbilden z.B.



Im zweiten Abschnitt beim Erstellen lässt die Aufgabe offen ob man einfache Windräder (als 4 rechtwinkligen Dreiecke) oder Schwierige erstellt.

Grobziel: Die Schüler sollen Windräder mit Dreiecken legen und selbst zeichnen

- Die Schüler sollen Windräder nachlegen

- 11. Bei Schlaf zeichnen,

Phase	Verlauf	Materialien / Sozialform
Einstieg	Sitzkreis - L. legt Zeichnungen von Windrädern in der Mitte z.B.  - Schüler äußern sich spontan (z.B. "Das sind vier Dreiecke", "Das ist ein Windrad", ...) erwünschte Aussage zudem: "Das hatten wir letzte Stunde, das ist drehsymmetrisch") Falls nicht: "Denkt an letzte Stunde") - L.: "Richtig diese Windräder sind drehsymmetrisch und bestehen aus Dreiecken. Wir wollen jetzt jetzt solche Windräder nachlegen. Hier vorne liegen viele verschiedene Kartchen, aus die ihr euch nehmen könnt, jeder bekommt außerdem einen Briefumschlag mit verschieden großen Dreiecken. Versucht die Windräder mit diesen Dreiecken. Versucht die Windräder mit diesen Dreiecken auszulegen. Am Ende sollt ihr außerdem 2 verschiedene in euer Heft gezeichnet haben, nehmt dazu die Überschrift von der Tafel"	Zeichnungen von Windrädern Tafel: <u>Windräder</u> Bilder hängen darunter

Erarbeitung	Schüler holen sich Kärtchen und legen aus (genaue Beschreibung der Kärtchen siehe S. 16)	Einzelarbeit Auslegen von Kärtchen und Briefumschlägen mit Dreiecken
Kurze Zwischen Reflexion	L.: „wie war das Auslegen der Kärtchen was ist dir leicht oder schwer gefallen“ Schüler äußern sich L.: „würde ich gern selbst an Windrad zeichnen (herstellen), ich hab hier aber nur ein so ein großes Dreieck“ Mögliche Schülerantworten: - „Wir nehmen mehrere kleinere Dreiecke (zerschneiden es)“ - „Man nimmt das Dreieck, zeichnet es einmal ab und dreht es dann und zeichnet es wieder ab“ L.: „Richtig. Jetzt sucht ihr euch eine Dreiecksgröße von euren Dreiecken aus, ihr bekommt ein Arbeitsblatt von mir und könnt euer eigenes Windrad erstellen.“	Unterrichtsgespräch
Vertiefung	S. erstellen eigenes Windrad aus einem Dreieck, dass gedreht wird.	AB „Mein Windrad“
Reflexion	Alle Windräder werden, an die Tafel gehängt, betrachtet. Im Tafelkino wird noch, einmal besprochen, was den Kindern leicht oder schwer fiel beim Zeichnen.	Tafelkino

Weiterführung in nächsten Stunden:

In kommenden Stunden kann an die Windräder angeknüpft werden. Möglich wäre z.B. ein Spannen von Windrädern auf dem Geobrett. *5.20 Oder ein Memory mit jeweils gedrehten Bildern der Ursprungswindräder. Auch mithilfe von Folien kann man die Drehsymmetrie der Windräder überprüfen, indem das Windrad darauf gezeichnet und dreht, es muss dann immer zum Ausgangswindrad deckungsgleich sein. In Bildern kann man Windräder vervollständigen lassen usw.

* Durch die Drehung des Geobretts lässt sich außerdem gut die Drehsymmetrie überprüfen.