

Thema nr. 1

- ① Die Geometrie ist ein Zweig der Mathematik, der sich mit den Gebilden des Raumes und der Ebene sowie deren Merkmale und Eigenschaften beschäftigt.

Unter einer ebenen Figur versteht man dabei die Menge aller Punkte des zweidimensionalen Raumes, die von endlich vielen Seiten begrenzt wird.

Eine solche Figur nennt man symmetrisch, wenn es eine nicht identische Kongruenzabbildung gibt, die die Figur auf sich selbst abbildet. Unter einer Kongruenzabbildung versteht man dabei eine Bewegung (oder auch Isometrie), die die Größe und Form einer Figur erhält. Sie ist also Längen-, Seiten- sowie Winkelmaßtreu.

Allerdings muss beachtet werden, dass der Begriff Symmetrie im engen Verhältnis zur Kongruenz steht, jedoch nur die Eigenschaft einer Figur beschreibt. Die Kongruenz dagegen beschreibt eine Relation zwischen zwei Figuren. Zwei Figuren sind genau dann zueinander kongruent oder deckungsgleich, wenn sie durch eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden kann.

Beispiel:



Diese Figuren A und B sind zueinander kongruent, da sie durch eine Kongruenzabbildung, in diesem Fall eine Drehung, zur Deckung gebracht werden können.

Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen folgenden Kongruenzabbildungen: Achsenspiegelung, Verschiebung, Drehung und Schubspiegelung. Dementsprechend gibt es auch verschiedene Symmetriearten, die nachfolgend genau erläutert werden.

Vor allem in der Grundschule werden nur ebene Figuren auf ihre Symmetrieeigenschaften untersucht. Die Symmetrie von Körpern wird hier nicht thematisiert.

Symmetriearten und zugehörige liegenden Kongruenzabbildungen:

1) Achssymmetrie

Eine Figur heißt achsensymmetrisch, wenn es eine Geraden-Spiegelung gibt, die die Figur auf sich selbst abbildet.

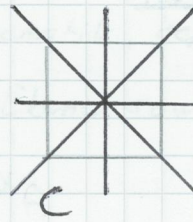
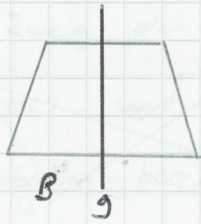
Eine Geraden-Spiegelung ist eine Kongruenzabbildung unter folgender Vorgabe:

Sei g eine Gerade.

- 1) Jeder Punkt P auf g wird auf sich selbst abgebildet.
- 2) Ein Punkt A , der nicht auf g liegt und sein Bildpunkt A' liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden g .
- 3) Die Strecke $\overline{AA'}$ schneidet die Gerade g in einem rechten Winkel.
- 4) Die Strecken $\overline{PA}$ und $\overline{PA'}$ sind gleich lang.

Bei:

Beispiele für (nicht) symmetrische Figuren:



Figur A ist nicht achsensymmetrisch, die Figuren B und C dagegen schon. Bei letzteren gibt es eine Achsenspiegelung und der Geraden g , sodass die Figuren auf sich selbst abgebildet werden können. Dabei ist g die Symmetrieachse. Figur C gibt es sogar mehrere Symmetrieachsen. B ist beispielsweise achsensymmetrisch, denn spiegelt man alle Punkte links und rechts von g so erhält man wieder die Ausgangsfigur.

Drehsymmetrie

Eine Figur heißt drehsymmetrisch, wenn es eine Drehung um einen Punkt Z mit einem Drehwinkel α gibt, so dass die Figur auf sich selbst abgebildet wird. Der Punkt Z heißt dabei Drehzentrum.



Ein gleichseitiges Dreieck ist demnach drehsymmetrisch, da es durch eine Drehung um 120° wieder auf sich selbst abgebildet wird.

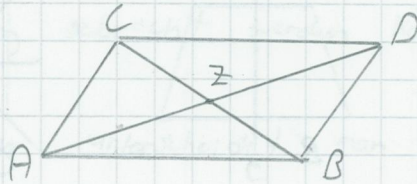
☒ siehe S. 6

Punktsymmetrie

Eine Figur heißt punktsymmetrisch, wenn es eine Punktspiegelung am Punkt Z gibt, die die Figur auf sich selbst abbildet. Der Punkt Z heißt dabei Symmetriezentrum. Die Punktspiegelung kann auch als Spezialfall einer Drehung ~~um~~ gesehen werden, die sie einer Drehung um 180° ent-

spricht.

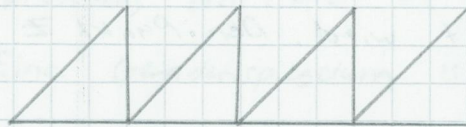
Beispiel:



Ein Parallelogramm ist bspw. punktsymmetrisch zum Punkt Z , was in diesem Fall dem Schnittpunkt der Diagonalen entspricht. Spiegelt man nun hier alle Punkte A, B, C, D am Punkt Z und verändert deren Bildpunkte A', B', C', D' so erhält man wieder die Ausgangsfigur. Das Parallelogramm ist demnach punktsymmetrisch.

Verschiebungssymmetrie

Eine Figur heißt verschiebungssymmetrisch, wenn es eine Verschiebung gibt die die Figur auf sich selbst abbildet.



Dieses unendliche Ornament ist bspw. verschiebungssymmetrisch, da es durch die Verschieben auf sich selbst abgebildet werden kann.

Eine Verschiebung ist eine Kongruenzabbildung unter folgender Vorgabe.

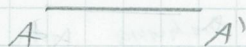
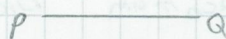
Sei $\overline{PQ}$ eine orientierte Strecke.

1) Die Strecke durch A und seinen Bildpunkt

A' ist parallel zu $\overline{PQ}$

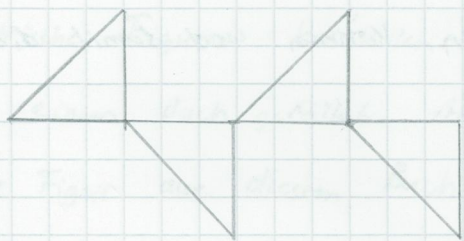
2) $\overline{AA'}$ und $\overline{PQ}$ sind gleich orientiert.

3) $\overline{AA'}$ und $\overline{PQ}$ sind gleich lang.



Schubspiegelungssymmetrie

Eine Figur ist Schubspiegelungssymmetrisch, wenn sie durch eine Verschiebung und eine Achsenspiegelung entlang der Verschiebungsrichtung auf sich selbst abgebildet wird. Somit ist eine Schubspiegelung eine Verkettung von Verschiebung und Achsenspiegelung.



Dieses ~~und~~ unendliche Ornament ist bspw. Schubspiegelungssymmetrisch. Doch danach eine Verschiebung nach rechts und eine Spiegelung an

der Seite a wird es wieder auf sich selbst abgebildet.

1) Eine Drehung V^* ist eine Kongruenzabbildung unter folgender Vorgabe,

* um einen Punkt Z und einen Winkel α

1) Der Punkt Z wird auf sich selbst abgebildet.

2) Ein Punkt A , ist verschieden von Z ist.

so sein Bildpunkt A' auf dem Kreis um Z mit dem Radius $\overline{ZA}$.

3) Für zwei Punkte A und B die ~~verschieden~~ verschieden von Z sind gilt:

$$(i) \angle AZA' = \angle BZB'$$

(ii) $\angle AZA'$ und $\angle BZB'$ haben den gleichen Drehsinn.

2 Aktivitäten zum Thema Achsensymmetrie

In der Grundschule wird die Achsensymmetrie in der dritten Klasse behandelt. Wichtige Begriffe die hierbei eingeführt werden müssen, sind: deckungsgleich, Symmetrieachse und Symmetrie. Da dies sehr schwierige und komplexe Begriffe sind, muss den Schülern über die Handlungsebene, also enaktiv, ein Zugang zum Thema gewährt werden, damit sie selbst vielfältige Erfahrungen zur Achsensymmetrie machen können und damit die geforderten Begriffe verinnerlichen.

Falten

Hierfür bietet sich besonders das Falten an, in Kombination mit sog. Klecksbildern.

Zunächst lässt man die Schüler (SuS) ein Blatt Papier in der Mitte zu einem Buch falten, sodass beide Seiten genau aufeinander passen. Danach wird auf eine Hälfte des Blattes Tinte oder Wassermalfarbe aufgetragen und die zweite Hälfte des Blattes darauf gedrückt.

Je nachdem, ob sich beide Kleckse berühren, erhält man eine symmetrische Figur oder deckungsgleiche (zueinander kongruente Figuren).



Mit Hilfe dieser Klecksbilder können die SuS ein gutes Verständnis für den Begriff deckungsgleich aufbauen, da sie durch das Falten sehen werden, dass beide Hälften / Figuren genau aufeinander passen. Auch der Begriff Symmetrieachse kann gut thematisiert werden, da durch das Falten zu

Beginn bereits hergestellt bzw. sichtbar gemacht wurde. Als Merkhilfe könnte man die Symmetrieachse auch anfangs mit Faltlinie bezeichnen, um an die konkreten Erfahrungen der SuS anzuknüpfen.

Falten und Schneiden

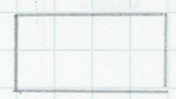
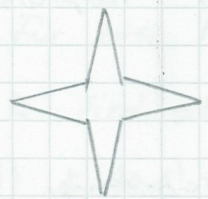
Hier bieten sich noch vielfältigere Lernmöglichkeiten für die SuS an. Sie können z.B. durch den Faltschritt weitere symmetrische Figuren herstellen. Hier wird auch wieder ein Blatt zu einem Buch gefaltet. Anschließend schneiden die SuS eine Figur aus diesem Buch aus. Durch Aufklappen erhalten sie eine symmetrische Figur. Als weitere Aufgabe sollte man die SuS nun die Symmetrieachse in diese Figur einzeichnen lassen. Hier wird nochmals das Verständnis geschult, dass in diesem Fall die Faltachse der Symmetrieachse entspricht. Deshalb sollte diese farblich hervorgehoben werden.



→ entstandene Figur

Aufgabe: Zeichne die Symmetrieachse ein.

Umgekehrt könnte man den SuS auch folgende Aufgaben erteilen:



← Auf einem Arbeitsblatt sind diese Figuren gegeben.

Die Aufgabe könnte nun lauten:

„Schneide mit der Falttechnik diese Figuren aus.“

Zeichne danach die Symmetrieachsen ein.“

Somit müssen sich die SuS zunächst bildlich vorstellen, wo sie die Figuren falten müssen um sie nach dem Schneiden zu erhalten. Sie müssen sich die Symmetrieachse also zunächst „denken“. Zur Differenzierung könnte man die SuS befragen, herauszufinden das es mehrere Möglichkeiten gibt diese Figur mit dem Faltschritt herzustellen.

Spiegeln

Ein sehr klassischer Zugang zum Thema Achsensymmetrie bietet sich vor allem durch das Spiegeln an. Hierfür können normale Handspiegel oder sog. „Geo-Spiegel“ aus Kunststoff verwendet werden. Das gut an dem Material ist, dass es bereits einen großen Anforderungscharakter für die SuS hat und so sehr motivierend wirkt.

Zum einen können zunächst vorgegebene Figuren auf ihre Symmetrie überprüft werden indem der Spiegel an die vermutete Symmetrieachse angelegt wird. Durch den Vergleich von Spiegelbild und der tatsächlichen Figur lassen sich so vielfältige Aussagen machen. Anschließend kann die richtige Symmetrieachse wieder eingezeichnet werden.

So lernen die SuS den Spiegel als Werkzeug zur Überprüfung der Symmetrie von Figuren kennen.

Man kann somit im nächsten Schritt bei vorgegebenen Figuren erst die Spiegelsachsen vermuten und einzeichnen und anschließend mit dem Spiegel prüfen lassen.

Falsch eingezeichnete Symmetrieachsen lassen sich durch Anlegen gut identifizieren.

Allerdings sind auch andere Lernaktivitäten mit Spiegeln

möglich, wie folgende Aufgabe zeigt.

Mache  zu:

a)  b)  c)  usw.

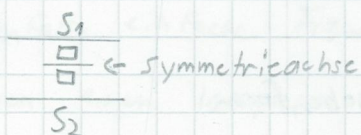
Hier müssen die SuS durch geschicktes Anlegen ~~und somit unter~~ des Spiegels eine neue Figur erzeugen. Dabei sollen sie erkennen, dass unterschiedliches Anlegen und somit unterschiedliche Spiegelachsen auch sehr verschiedene neue Figuren entstehen lassen können.

Spannen

Das Spannen von Figuren am Geobrett bietet auch viele Lernaktivitäten. Einerseits können verschiedene Figuren, wie Quadrate, Dreiecke etc. nach Vorgabe am Geobrett gespannt werden. Mit andersfarbigen Gummis können dann Symmetrieachsen kenntlich gemacht werden.

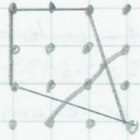
Man kann die SuS auch frei am Geobrett experimentieren lassen, indem man sie ^{beliebige} Figuren spannen lässt, die jedoch symmetrisch sein müssen. Dies können sie durch Spannen der Achse überprüfen.

Die SuS können hier auch gut in Partnerarbeit Erfahrungen zum Symmetriebegriff sammeln. Jeder SuS hat ein eigenes Geobrett. Die SuS stehen sich gegenüber.

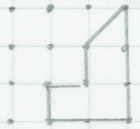


Zu den beiden Geobrettern sollen sich die S eine Spiegellachse denken. Ein Schüler spannt nun eine Figur und der Partner muss diese aus der gedachten Linie spiegeln.

Für stärkere SuS bietet sich dies zur Differenzierung an:



Hier müssen die SuS die Figur spiegeln, wobei die Symmetrieachse innerhalb des Drahtens liegt.

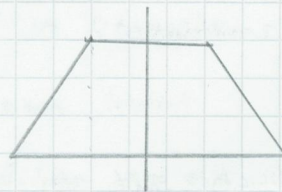


Bei dieser Aufgaben sollen die SuS feststellen, dass sie die Figur ändern, also umspannen müssen damit sie symmetrisch wird.

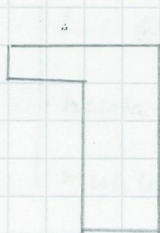
Zeichnen

Das Zeichnen Symmetrischer Figuren auf Karopapier bietet ebenfalls verschiedene Aufgabenmöglichkeiten.

- 1) Zu vorgegebenen Figuren können alle Spiegelachsen gefunden werden und anschließend eingezeichnet werden. Zur Differenzierung kann die Achse auch nicht genau auf dem Kästchenrand verlaufen:



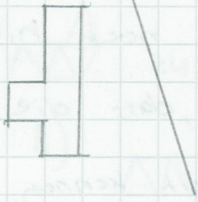
- 2) Auch können vorgegebene Figuren an einer Achse gespiegelt werden. Dies kann dann mit Stahl- oder Geo-Spiegeln auf Richtigkeit überprüft werden.



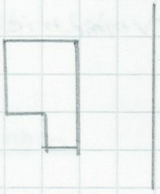
Bei dieser Aufgabenform

kann der Schwierigkeitsgrad durch Figuren, die komplexer sind, erhöht werden.

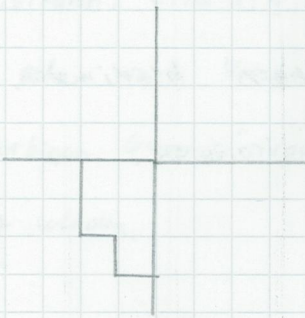
- 3) Für leistungsstärkere Schüler kann die Spiegelachse auch schräg, also nicht entlang der Kästchenlinie verlaufen.



- 4) Auch mehrfachspiegelungen können gut auf Kuropapier durchgeführt werden und je ~~je~~ nach Leistungsstand der SuS variieren



Spiegle. erst an der blauen, dann an der roten Achse.



Durch Spiegelungen an solchen Achsen kann bereits ein Zugang zur Drehsymmetrie gelegt werden.

③ Unterrichtseinheit „einfache Figuren drehen“

- 1) Sachanalyse: siehe Aufgabe 1

- 2) Lernvoraussetzungen der Schüler

Die Drehsymmetrie wird in der Grundschule in der 4. Klasse behandelt. Zunächst wird die Achsensymmetrie vertieft und ebenfalls einfache Figuren verschoben. Somit haben die SuS schon einen komplexen Symmetriebegriff aufgebaut. Die Begriffe Symmetrie, symmetrisch und deckungsgleich sind bekannt (auch schon aus Klasse 3).

Begriffe, die in dieser Stunde kennengelernt werden sollen, sind:

Drehpunkt und Drehrichtung.

Drehsymmetrie wurde vor dieser Stunde noch nicht explizit behandelt, jedoch kann man davon ausgehen, dass die SuS drehsymmetrische Figuren aus ihrer Lebenswelt kennen.

Lernziele:

Grobziel: Die Schülerinnen sollen durch das Drehen einfacher Figuren einen Zugang zur Drehsymmetrie erhalten.

Feinziele: Die Schülerinnen sollen

- erkennen, dass einige Figuren durch Drehung zur Deckung gebracht werden können.
- Drehpunkt und die Länge von Drehungen bestimmen.
- Eigene Figuren nach Vorgabe drehen können.

Unterrichtsverlauf

Artikulation	Verlauf	Methoden + Medien
Einführung	L ruft SuS in Sitzhalbkreis und gibt SuS einen Stimmungs Impuls → L hängt Bilder an die Tafel von Windrädern SuS: Ich sehe eine Windmühle. Windmühle drehen sich ... L: Genau! Ich habe euch für heute auch eine wirklich Windmühle gebastelt und	Bilder Sitzkreis

- L hängt ein Bild von einer Windmühle mit beweglichen Windrädern an die Tafel.

Bild

- L holt S nach vorne der davor drehen soll.

- SuS beobachten

- L macht fragendes Gesicht (man sieht an der Windmühle, dass nach einer Viertel-drehung die Räder wieder auf der Ausgangsposition sind.)

- Hilfspuls: L dreht nochmal das Windrad und spricht dabei: „Ich drehe mein Rad 1 mal und dann ...“

- SuS: Wenn man die Windräder ein Mal dreht sehen sie wieder genauso aus!

Erarbeitung

- L: Genau! Was passiert, wenn ich noch ein mal drehe?

→ L holt S nach vorne, der es demonstriert

- SuS: Die Windräder sehen wieder genauso aus.

- L: Aha! Aber unsere beweglichen Räder sehen nicht nur genauso aus, sondern decken die Windräder auf dem Bild auch zu. Du kennst hierfür auch schon einen Begriff!

- SuS: Die Windräder sind deckungsgleich!

- L: Super! Den Begriff kennen wir schon seit der dritten Klasse und er hat mit einem ganz bestimmten Thema zu tun!

- SuS: Mit Symmetrie!

- L: Genau, das war die Achsensymmetrie. Aber unser Windrad haben wir gar noch nicht gespiegelt. Wie könnte diese Symmetrieart heißen?

SuS: Sie heißt Drehsymmetrie!

- L: Erkläre mir jetzt noch mal was Drehsymmetrie heißt!
- S verbalisiert: wenn ich eine Figur drehe und sie ist nach einer Drehung wieder gleich ist sie drehsymmetrisch.
- L: Super: Wir haben bei der Drehsymmetrie zwar keine Spiegelachse, aber dafür etwas anderes, einen Drehpunkt. Versucht mal ihn zu finden.
- L bittet einen Schüler nach vorne, der den Drehpunkt anzeichnen soll → ~~L heftet Windrad an Tafel~~
- L: Ist es eigentlich egal wie viel ich mein Windrad drehe?
- L dreht Windrad sodass es nicht zur Drehung kommt.
- SuS: Nein, das reicht mir nicht. Das Windrad muss weiter gedreht werden.
- L: wie könnte man das nennen?
- SuS: Eine halbe Drehung oder eine viertel Drehung.
- L: Genau: Wer kann nochmal wiederholen was wir bei der Drehsymmetrie beachten müssen.
- SuS wiederholen Begriffe

Sicherung

- L heftet mehrere Spielkarten an die Tafel
- SuS sollen Drehpunkt und die Länge der Drehung bestimmen.
- L: So, nun dürft ihr selbst Figuren drehen
- SuS setzen sich auf ihren Platz dort bearbeiten sie verschiedene Aufgaben & siehe Seite ...

Spielkarten

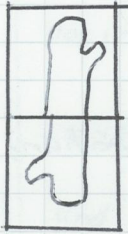
Festigung

L. beendet Arbeit am Arbeitsblatt

L. fordert SuS auf im Klassenzimmer
drehsymmetrische Figuren zu finden.

Aufgaben:

1.) Ist diese Spielkarte symmetrisch?

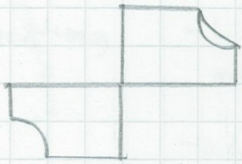


• achsensymmetrisch

• drehsymmetrisch

Begründe deine Wahl! Zeichne den Drehpunkt oder die
Symmetrieachse ein!

2.) Ist diese Figur drehsymmetrisch?



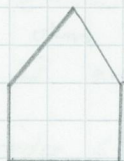
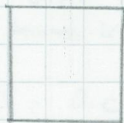
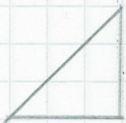
Finde und zeichne ein:

• Drehpunkt

• Drehrichtung

• Länge der Drehung

3.) Drehe selbst. wähle dir eine Figur



Der Drehpunkt deiner Figur soll an einer Ecke liegen.

Nun drehe:

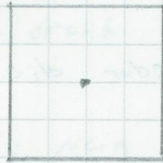
- a) die Figur nach rechts um eine Viertel ~~der~~ Drehung
- b) die Figur nach links um eine halbe Drehung

4) Hier ist der Drehpunkt in der Mitte.

a) Drehe nach rechts um die Hälfte.

Was fällt dir auf?

b) Drehe nach links um eine Viertel Drehung.



Aufgabe 4 Für Leistungsstärker

5) Wie wurde hier gedreht?

Schreibe auf.

