

2.

1. Dezimalbrüche können mit folgenden gemeinsamen Brüchen eingeführt werden.

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$$

$$0,2 + 0,3 = \underline{\underline{0,5}}$$

2.2

Dezimalbrüche können mit Hilfe der Stellenwerttafel eingeführt werden.

Bsp.

H	Z	E	z	h	+
	2	5	,	1	4
				5	

Hier ist die Dezimalzahl
25,145 abgebildet.

Die Position des Kommas sollte zu Beginn einer Lernsequenz „Dezimalbrüche“ immer farblich gekennzeichnet werden.

Gleichzeitig konnte man hier noch das Kommazeichen in die Stellenwerttafel eintragen.

nächstes Beispiel

2	h	+
4	3	

0,43

2	h	+
2	5	

0,25

2	h
6	8

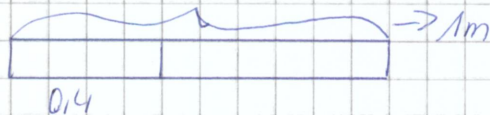
0,68

$$0,43 + 0,2 = 0,68$$

Verwendung von Größen

$$\begin{array}{c} \text{U} \\ \approx \end{array} + \begin{array}{c} \text{U} \\ \cup \end{array} = \begin{array}{c} \text{U} \\ \cup \end{array}$$

0,2 l 0,3 l 0,5 l



↳ Verwendung von Längen

Schüler kommt mit Größen wie z.B. Liter, Kilogramm, Meter, ... im Alltag häufig in Berührung.

3.

Fehler können bei der Multiplikation eines Dezimalbruchs mit einer Stellenwertzahl z.B. „10, 100“ auftreten.

Gleiches gilt für die Division mit Stellenwertzahlen. Diese Vorgänge müssen mit Hilfe der Stellenwerttafel genau erarbeitet werden.

Bsp.: $0,25 \cdot 10$

z	h
2	5



E	z	h
	2	5
		0

Schüler sollen erkennen, dass das Komma bei der Multiplikation mit einer Stellenwerttafelzahl nicht verschoben wird.

$$\Rightarrow 0,25 \cdot 10 = 2,5$$

Es wäre günstig das Kommazeichen mit einer Farbe darzustellen.

Außerdem können Fehler auftreten wenn Schüler eine Dezimalzahl in einen gemeinen Bruch umwandeln müssen.

denkbarer Fehler:

$$1,25 = \frac{1}{25} \quad \text{oder} \quad \frac{4}{4}$$

Schüler können glauben, dass ^{das} „Kommazeichen“ ^{die} gleiche Bedeutung wie der Bruchstrich eines gemeinen Bruchs. Dies ist aber nicht korrekt.

Solche systematische Fehler können beseitigt werden, wenn man dem Schüler vorab genau erklärt, welche Bedeutung das Komma eigentlich hat.

Hier eignet z.B. die Stellenwerttafel

BSP:

H	Z	E	z	h	t
2	3	4	1	7	6

↓
hier würde das
Kommazeichen
stehen

2 3 4 , 1 7 6

Es wäre günstig die Darstellung in der Stellenwerttafel der „normalen Schreibweise“ einer Dezimalzahl bzw. Dezimalbruches

genau gegenüber zu stellen.

Man sollte im Unterricht eine günstige Schreibweise einführen:

Schlecht

Bsp. zu 0,91

▷ schlecht: „Nullkommavierzehn“

▷ besser: „Nullkommaeinsvier“

Bei den Nachkommastellen sollte man im positionsweise halten.

Wenn man das nicht macht, dann können unter Umständen Probleme beim Umwandeln eines Dezimalbruchs in einen gemeinen Bruch auftreten.

Bsp: $0,25 = 25$ oder $0,25 = \frac{2}{5}$

richtig $0,25 = \frac{1}{4}$

Dem Schüler muss bewusst werden, dass Nachkommastellen ganz bestimmte Positionen in der Stellenwerttafel einnehmen.

Beim schriftlichen Addieren können auch Fehler auftreten.

$$\begin{array}{r} \cancel{0,34} \quad 0,34 \\ \cancel{+ 0,42} + 0,42 \\ \hline 4,54 \end{array} \quad \downarrow$$

besser:

$$\begin{array}{r} 0,34 \\ + 0,42 \\ \hline 0,76 \end{array}$$

Schüler sollen lernen, dass sie Dezimalbrüche bei der Addition immer genau positionswise untereinander schreiben

Dasselbe Problem kann auch bei der schriftlichen Subtraktion von Dezimalbrüchen auftreten.

Eine ungenaue Schreibweise könnte auch zu folgendem Fehler führen!

$$0,14 + \cancel{0,42} + 0,28 = 42$$

Wenn man „Nullkommaziffern“ spricht könnte kein Schüler bei manchen Schülern der Eindruck erweckt werden 0,42 ist eine ganze Zahl.

1. Zu den reellen Zahlen ~~gehören~~ gehören folgende Arten von Dezimalbrüchen.

a) $0,25 = \frac{1}{4} =$ endliche Dezimalbruch

b) $\frac{1}{3} = 0,3\overline{}$ unendliche, periodische Dezimalbrüche,
reimperiodisch

c) $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6} \Rightarrow$ unendlich gemischt periodische
Brüche

weiteres Beispiel

$$\frac{1}{11} = 0,09\overline{09}$$

d) $\frac{1}{7} = 0,142857142\dots$
unendlich, nicht periodische Brüche

e) $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

Die besondere Zahl $\sqrt{2}$ ist auch ein unendlicher,
nichtperiodischer Dezimalbruch.

f) Alle gemeinen Brüche, deren Nenner bei der Primfaktorzerlegung nur Primzahlen enthält, die zur Basis 10 gehören, lassen sich als endliche nichtperiodische Dezimalbrüche darstellen.

Beispiele:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2 \cdot 5}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5}$$

Es geht hier um die Primzahlen 2 und 5.

Sobald sich der Nenner eines gemeinen Bruches andere Primfaktoren bzw. Primzahlen enthält ist das die Darstellung des dazugehörigen Dezimalbruches unendlich.

Eine Primzahl ist eine Zahl die durch sich und durch 1 teilbar ist.

Die Zahl 1 gehört hier definitionsgemäß nicht dazu.

Wenn der Nenner nur aus der Primzahl 3 besteht,
dann ist die Dezimaldarstellung dieses Bruches unendlich,
reimperiodisch.

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

4.

Bei endlichen Dezimalbrüchen ist die Umwandlung in gewöhnliche Brüche einfach.

Bsp.:

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Zähler und Nenner kann jeweils durch die Zahl 25 gekürzt werden.

Vorgehen im Unterricht:

▷ Stellenwerttafel zur Hilfe nehmen

Decimalbruch 0,25 in die Stellenwerttafel eintragen

E	z	h
0	2	5

Dann Schüler auffordern als gemainen Bruch zu schreiben.

Schüler erkennt, dass in der Stellenwerttafel $\frac{25}{100}$ eingetragen sind.

Jetzt könnte noch der Zusatzauftrag

„Kürze soweit wie möglich“ erfolgen.

Beim Kürzen soll der Schüler am besten einen Bleistift verwenden.

Bsp.:

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

L. 2

Unendliche, periodische Brüche können auch als gemeine

Unendliche, reinerperiodische und unendliche gemischt periodische Brüche können auch in gemeine Brüche umgewandelt werden. Hier hilft der Einsatz der Stellenwerttafel ^{auch} nicht mehr viel, weil die Brüche keine endliche Darstellung haben.

Außerdem

Bsp. 1

Bsp.:

$$0,3\overline{3} = \frac{1}{3}$$

$$0,1\overline{6} = \frac{1}{6}$$

$$0,1\overline{1} = \frac{1}{9}$$

Man kann die Stellenwerttafel hier ~~nur~~ zur Annäherung benutzen. In vielen Fällen hilft diese Annäherung aber sehr stark sich vorzustellen um welchen gewöhnlichen Bruch es sich handelt.

Bsp:

$0,\overline{3}$

Schüler soll diesen ~~harte~~ Dezimalbruch mit zwei oder drei Nachkommastellen in eine Stellenwerttafel eintragen.

z h t

3 3 3

Schüler soll nun Vorschläge für die Umwandlung in einen gewöhnlichen Bruch machen.

Stellenwerttafel mit zwei Nachkommastellen ist hier vielleicht übersichtlicher.

$$\begin{array}{cc} z & h \\ 3 & 3 \end{array} = \frac{33}{100}$$

Dieser Bruch kann zwar nicht vollständig gekürzt werden. Aber der Schüler kann sich jetzt vorstellen um welchen Bruch es sich handeln könnte:

Lehrer: „Schätze wie oft 33 in der Zahl 100 enthalten ist.“

Schüler: „ungefähr dreimal“

Lehrer: „Im welchen Bruch wird es sich mit hoher Wahrscheinlichkeit handeln?“

Schüler: „Wahrscheinlich um ein Drittel“

Umwandlung von unendlichen, nichtperiodischen Brüchen
Dezimalbrüchen ist nicht möglich. ~~weil bei solchen
den dazugehörigen geminderten Brüchen keine eindeutige
Primfaktorzerlegung durchgeführt werden kann.~~

Die Stellenwerttafel hilft hier nicht weiter.

Beispiele:

$\frac{4}{7}$ ~~ist~~ Beim Nenner 7 ist keine Primfaktorzerlegung
möglich.

Beweis soll mit Hilfe der besonderen Zahl $\sqrt{2}$
erbracht werden.

$$\frac{4}{7} \approx 0,142857142000$$

$$4 \cdot 4$$

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562000$$

Beide Zahlen sind unendliche, nichtperiodische Dezimal-
zahlen. Das liegt daran, dass bei keine der beiden
Zahlen eine eindeutige Primfaktorzerlegung möglich ist.

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{z}{h}$

$$\sqrt{2} = \frac{z}{h} \quad | \cdot 2$$

$$2 = \left(\frac{z}{h}\right)^2$$

$$2 = \frac{z \cdot z}{h \cdot h}$$

$$2 = h \cdot h = z \cdot z$$

$\Rightarrow$ hier ist keine eindeutige Primfaktorzerlegung möglich, weil der Faktor 2 nur auf einer Seite der Gleichung vorkommt.

zu 1.

~~Brüche~~ Gewöhnliche Brüche lassen sich in unendliche, periodische Dezimalbrüche umwandeln, wenn eine eindeutige Primfaktorzerlegung ~~möglich~~ ist des Nenners möglich ist.

~~$\frac{4}{9}$~~

Bsp.:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \underline{\underline{0,1\overline{1}}}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6} = \underline{\underline{0,1\overline{6}}}$$

$$\frac{1}{42} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7} = 0,023809523$$

Ergänzend sei erwähnt, dass bei solche Brüchen zusätzlich zu den Primzahlen 2 und 5 noch weitere Primzahlen auftreten.

3.

Systematische Fehler wie z.B. $1,5 = \frac{1}{5}$

treten in Mathematik Fach Mathematik generell häufiger auf als Flüchtigkeitsfehler z.B. bzw. Konzentrationsfehler.

Deshalb wäre es mit hoher Wahrscheinlichkeit besser mehr Zeit für die Einführungsphase für ein bestimmtes Thema aufzuwenden.

Systematische Fehler können in der Regel nur durch weitere Erklärungen des Lehrers bekämpft werden.

Deshalb sollte man in der Bearbeitungsphase mehr Zeit einplanen.

Konzentrationsfehler wie z.B. $0,3 + 0,4 = 0,34$ können nur durch das Vergessen eines Summanden bei der Addition können nur durch erhöhten Übungsaufwand beseitigt werden.

zu 2.

Bei Brüchen und auch bei Dezimalbrüchen bietet es sich an die Einführungsstunden nach dem EIS-Verfahren zu gestalten.

EIS steht für enaktiv, ikonisch, symbolisch.

Unter enaktiv versteht man die Einbeziehung von Alltagsgegenständen und mögliche Handlungsfahrungen der Schüler. Unter ikonisch versteht man die zeichnerische bzw. bildhafte Auseinandersetzung mit einem gewissen Thema. Symbolisch meint die Darstellung der vor zuvor erarbeiteten Ergebnisse mit Hilfe von mathematischen Zeichen und Zahlen.

Bsp:

Lehrer füllt in einen Messbecher 0,3 Liter und in einen zweiten Messbecher 0,2 Liter Wasser.

Dann werden die ersten bei den Messbecher in einen dritten Messbecher umgefüllt.

Im dritten Gefäß befindet sich nun 0,5 Liter Wasser.

Dem Schüler wird hier durch aktives Tun veranschaulicht, was ein Dezimalbruch ist. Der Bezug zu einem Ganzen, also einen Liter Wasser ist hier auch deutlich ersichtliche

Das war die enaktive Phase.

ikonisch

Lehrer zeichnet den ~~vorigen~~ vorgeführten Versuch an die Tafel.



$$0,3\text{ l} + 0,2\text{ l} = \underline{\underline{0,5\text{ l}}}$$

In der symbolischen Phase wird ~~mathematischer Vorgang~~ der bildhafte Vorgang nun mit mathematischen Zeichen und Zahlen versehen.