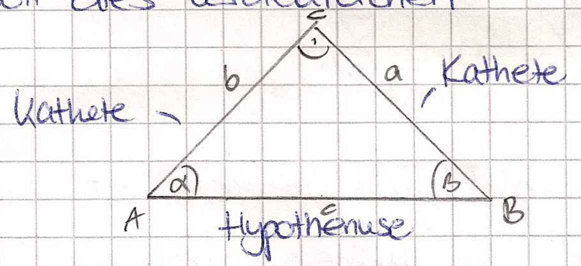
Thema 3

① Aufgabe

~~Satz des Pythagoras~~ Wichtige Begriffe

Die Satzgruppe des Pythagoras bezieht sich immer auf rechtwinklige Dreiecke. Ein rechtwinkliges Dreieck hat ~~besteht aus~~ einem rechten Winkel dem gegenüber die Hypothenuse liegt. Die anderen beiden Seiten werden als Katheten bezeichnet. Die folgende Skizze soll dies verdeutlichen:



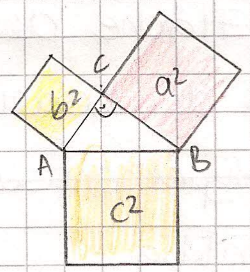
Hierbei ist b die Ankathete zu α und a die Gegenkathete zu α. Betrachtet man am Winkel β, so ist b die Gegenkathete und a die Ankathete. Der Winkel γ ist 90°.

* Satz des Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypothenusenquadrats.

also: $a^2 + b^2 = c^2$; $a^2 = c^2 - b^2$

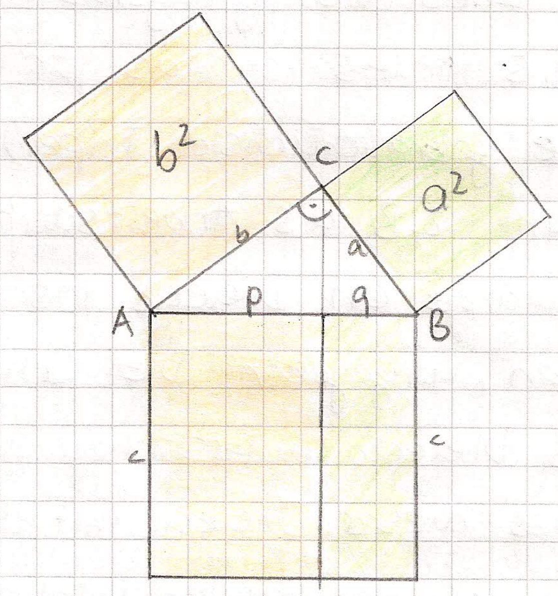
$b^2 = c^2 - a^2$



* Der Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist dier Flächeninhalt des einen Kathetenquadrats gleich dem Flächeninhalt der Hypothenuse und dem Katheten-anliegenden Hypothenusenabschnitt.

$a^2 = \cancel{h}\ c \cdot q$, $b^2 = c \cdot p$



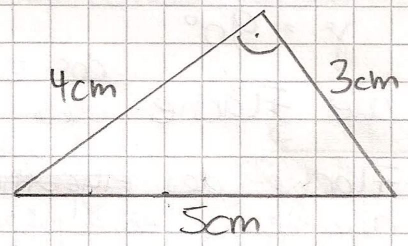
Umkehrung: ~~Beh~~ Voraus: $a^2 = c \cdot q$, $b^2 = c \cdot p$

Beh: $\gamma = 90°$

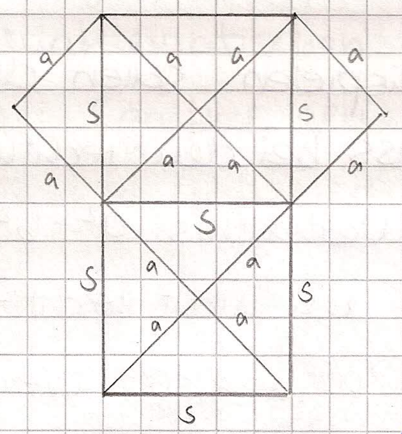
Ist in einem Dreieck die Fläche ~~des Katheten-quadrats~~ des einen Seitenlänge gleich der Fläche der ~~Hypothenuse~~ längsten Seite und dem ~~Katheten anliegenden~~ der ersten Seite anliegende ~~Hypothenusenabschnitts~~ Höhenfußpunktabschnitt, so ist der Winkel gegenüber der längsten Seite ein rechter Winkel.

2. Aufgabe: Zugangsweisen und Diskussion

Eine Möglichkeit die Schüler ~~zum~~ an den Satz des Pythagoras heranzuführen stellt das sogenannte Pythagoräische Tripel dar. Hierzu ist zu erwähnen, dass es sich ~~hier~~ um eine Zahlenkombination handelt, die streng genommen die Umkehrung des Satzes des Pythagoras aufgreift. Die Zahlen 3, 4, 5 (dies ist das für die Hauptschule gebräuchlichste Tripel) ~~lassen sich~~ werden den Schülern z.B als Arbeitsauftrag mit diesen als Seitenlänge ein Dreieck ins Heft zu ~~Setz~~ zeichnen, vorgegeben. Die Schüler sollen nun das Dreieck untersuchen und stellen fest, dass dieses Dreieck mit dieser Seitenlänge immer einen rechten Winkel hat.



~~Im Weiteren~~ Eine weitere Möglichkeit die Heranwachsenden an den Satz des Pythagoras heranzuführen bietet das Betrachten sogenannter "babylonischer Tontäfelchen".
Die gleichschenkligen Dreiecke bieten eine anschauliche Möglichkeit die Verhältnisse der Flächeninhalte darzustellen.



Den Schülern kann aufgezeigt werden, dass $s^2 = a^2 + a^2$

Allerdings kann es den Schülern Probleme bereiten, ~~das~~ die Beziehungen der Seitenverhältnisse zu verallgemeinern, da dies ~~g~~ wahrscheinlich etwas zu abstrakt ist.

Um ~~d~~ zu überprüfen, ob die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks immer einen Einfluss darauf haben lässt sich im weiteren Verlauf zusammen mit den Schülern überprüfen. Die Schüler bekommen bei dieser Möglichkeit des Zugangs die Aufgabe rechtwinklige und nicht rechtwinklige Dreiecke zu zeichnen und deren Seiten-verhältnisse in eine Tabelle zu tragen. Die Tabelle sollte folgende Werte beinhalten.

	a	b	c	a^2+b^2	c^2
rechtw. Δ	3cm	4cm	5cm	$25 cm^2$	$25 cm^2$
	⋮				
100°	3cm	2cm	4cm	$13 cm^2$	$16 cm^2$
	⋮				
80°	4cm	2cm	4,2cm	$20 cm^2$	$17,64 cm^2$
	⋮				

Kopie nicht lesbar

z.B ⊥ mit 100° und 80° - Winkel zu ~~ge~~zeichnen und in die Tabelle zu übernehmen ~~übernehmen werden~~

Anhand von vielen Beispielen sollen die Schüler feststellen, dass bei den rechtwinkligen Dreiecken das ~~Seiten~~ Verhältnis $a^2+b^2=c^2$ zutrifft, während bei den nicht rechtwinkligen Dreiecken (100° und 80°) die Abweichungen sehr groß sind.

Eine ~~letzte~~ weitere Möglichkeit um dies zu verdeutlichen bietet eine dynamische Geometriesoftware. Über einen Beamer kann man allen Schülern sehr gut anschaulich die Seitenverhältnisse in einem rechtwinkligen Dreieck nahe bringen. Ein besonderes Vorteil bei diesem Verfahren stellt die genaue Berechnung dar, da man viele "Hinterkomma-stellen" berechnen lassen kann.

Diskussion:

- Die erste Möglichkeit den Schülern über die Pythagoräischen Tripel an die Satzgruppe heranzuführen stellt eine ~~schöne~~ einfache vor allem sehr praktische Möglichkeit dar. Das eigentliche Problem daran ist, dass es sich hierbei um die Umkehrung des Satzes des Pythagoras handelt. Was aber für die Schüler kein

Problem darstellen dürfte. Demnach halte ich diese Methode besonders für den Einstieg als gelungene Möglichkeit. Allerdings würde ich auf den mathematischen Hintergrund der Tripel-Kombination (größter gemeinsamer Teiler = 1) in der Hauptschule natürlich verzichten.

- Die zweite hier aufgezeigte Herangehensweise ist meiner Ansicht nach positiv und negativ zu bewerten. Positiv, weil mit den Täfelchen (gleichschenkligen Dreiecken) auf praktische Weise agiert werden kann und somit ein~~e~~ en aktives ~~[illegible]~~ Zugang möglich ist. Negativ zu bewerten ist der wahrscheinlich schwierige Übertrag auf die Allgemeingültigkeit.

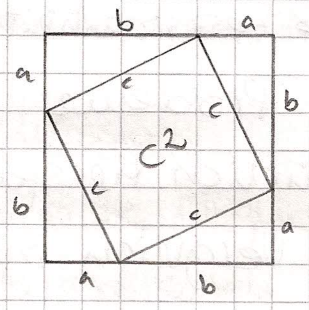
- Somit würde ich die von mir nächste beschriebene Zugangsweise direkt im Anschluss an die „babylonischen Tontäfelchen" empfehlen. Ergänzend wird hier auf sehr praktische Weise ~~die~~ die Besonderheit rechtwinkliger Dreiecke deutlich. Probleme bei dieser Methode stellen natürlich Messfehler dar, die allerdings durch den Vergleich mit den nicht rechtwinkligen Dreiecken in ihrem Gewicht reduziert werden.

Bezüglich der ~~Messfeh~~ Messfehler-Problematik stellt die letzte Möglichkeit (Software) einen gelungene Veranschaulichung des ~~p~~ Satz des Pythagoras dar. Allerdings fehlt bei dieser Methode, meiner Ansicht nach, das Agieren. ~~Akt Aka~~

Insgesamt ist es wahrscheinlich zu empfehlen eine Kombination mehrerer Möglichkeiten anzuwenden. Durch vielseitige Herangehensweise und abwechslungsreiche Methoden wird der Zugang für alle Schüler möglich und bereitet zudem noch Abwechslung und Freude.

④ Aufgabe

Beweis des Satzes des Pythagoras



Betrachet man die Zeichnung so sieht man, dass die Fläche $(a+b)^2$ aus dem Quadrat c^2 und den vier gleich großen Dreiecken $\frac{a \cdot b}{2}$ zusammengesetzt ist.

Anders ausgedrückt:

$$(ab)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

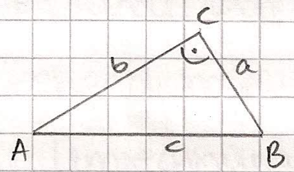
$$a^2 + b^2 = c^2$$

q.e.d

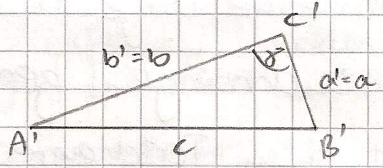
<u>Beweis der Umkehrung:</u>

Der Satz des Pythagoras besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenquadrate im folgenden Verhältnis stehen: $a^2 + b^2 = c^2$

<u>Skizze</u>



Man
Konstruiert ~~man~~ nun ein Dreieck A'B'C'
mit den Seitenlängen $a' = a$ und $b' = b$ und c.



Wegen dem Dreieck ABC gilt: $a^2 + b^2 = c^2$
deshalb (weil $a' = a$ und $b' = b$) gilt
$a'^2 + b'^2 = c^2$ demnach muss $c' = c$

Wegen dem Kongruenzsatz SSS sind die beiden Dreiecke ABC und A'B'C' kongruent.

Daraus folgt, dass der Winkel γ gleich $90°$ sein muss.

q.e.d.

Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist somit bewiesen.

Ist in einem Dreieck der Flächeninhalt des einen Seitenquadrats gleich der Summe der beiden anderen Seitenquadrate, so liegt der erstgenannten Seite ein rechter Winkel gegenüber.

(3.) Aufgabe

Unterrichtseinheit zur Anwendung des Satzes d. Pythagoras

Sachanalyse: Vergleiche hierzu Aufgabe 1.

Voraussetzungen

Die Schüler kennen bereits den Satz des Pythagoras. Sie haben die Formel $a^2 + b^2 = c^2$ bereits auf ebene Probleme angewandt und auch mit anderen Bezeichnungen gearbeitet. Sie haben bereits mit dem Taschenrechner einfache Aufgaben gelöst.

Die Schüler kennen den Begriff Diagonale und können mit Einheiten von Größen umgehen.

Auch die quadratische Pyramide haben die Schüler bereits kennengelernt.

Lernziele

Grobziel: Die Schüler wenden den Satz des Pythagoras bei einem Raumproblem an.

Feinziele. Die Schüler sollen...

a) ... aus einer Sachsituation eine Aufgabe zum Satz des Pythagoras erstellen können.

b) ... ~~da~~ eine Skizze entsprechend der Sachsituation beschriften können

c) ... erkennen, dass in einer quadratischen Pyramide die Diagonale über den Satz des Pythagoras zu berechnen ist.

d) ... erkennen, dass die Höhe im rechten Winkel zur Grundfläche ist.

e) ... die gefundenen Aufgaben zum Satz des Pythagoras umformen und ausrechnen können.

Aufwärmphase

Zu Beginn der Stunde legt der Lehrer eine Folie auf den Overheadprojektor auf dem verschiedene Aufgaben zur Umrechnung von Längeneinheiten und bereits durchgenommen einfache Aufgaben zur Formelumstellung des Satzes des Pythagoras abgebildet sind. Die Aufgaben werden den Schülern einzeln gezeigt (die anderen werden mit Papier abgedeckt) Jeder Schüler berechnet die Aufgaben für sich und meldet sich, wenn er glaubt das Ergebnis errechnet zu haben.

Die Aufgaben haben etwa dieses Format:

→ 100 m → $\boxed{?}$ dm
10 cm → $\boxed{?}$ dm
2000 cm → $\boxed{?}$ m

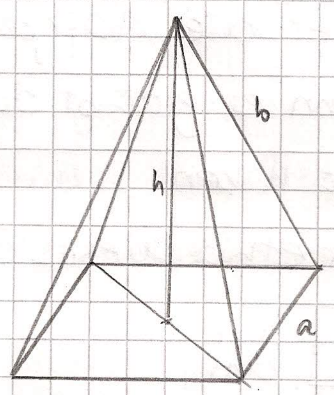
→ $e^2 + f^2 = h^2$ wie berechnet man f^2?
$x^2 + y^2 = a^2$ wie berechnet man y?

Hinführungsphase

Lehrer liest eine kurze Geschichte vor:

„In der Gärtnerei „Wiese" gibt es eine neue Atraktion! Ein Gewächshaus, das die Form einer Pyramide hat. Die Grundfläche des Gewächshaus ist ~~eine~~ quadratisch und hat jeweils 4m Seitenlänge. Außen betragen die Kantenlängen der Pyramide 10,40 m.
In der Mitte der Pyramide steht ein Efeugewächs. Wie hoch muss ~~das~~ Efeu an ~~der~~ eines senkrechten ⊥ Säule hochwachsen bis es die Spitze der Pyramide erreicht hat?"

Im Anschluss an die Geschichte öffnet der Lehrer die Tafel an der folgende Skizze zu sehen ist.



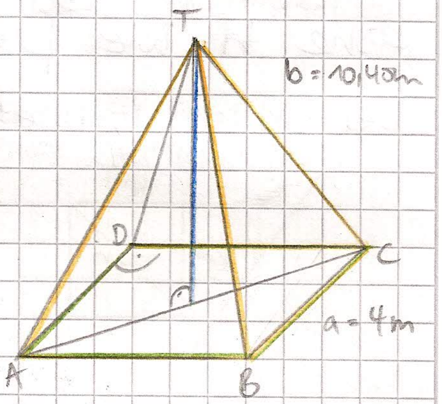
Den Text der Geschichte projeziert der Overheadprojektor neben die Tafel an die Wand.

Erarbeitung

Im Unterrichtsgespräch wird gemeinsam mit den Schülern die Skizze beschriftet. Um die räumliche Skizze nicht als einzigen (abstrakten) Bezugspunkt zu haben, bringt der Lehrer noch transparente Pyramidenmodelle (mit quadratischer Grundfläche) zu Veranschaulichung mit. Durch diese konkrete Raugehensweise sollten die Beschriftungen nachvollziehbar werden. Bzw. hat der Lehrer die Möglichkeit dem Schüler einzeln am Modell etwas zu zeigen. Folgendes Tafelbild soll entstehen

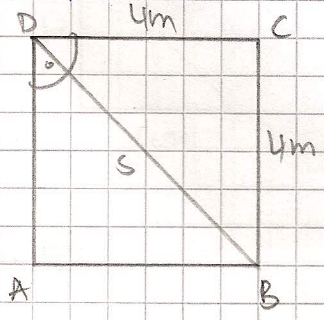
Gegeben:

- Seitenlängen = 10,40 m (gelb)
- Die Grundfläche hat die Seitenlänge 4 m (grün)
  Sie ist ein Quadrat!
- Die Grundfläche hat zwei Diagonalen S



Gesucht: Gesucht ist die Höhe h (blau)

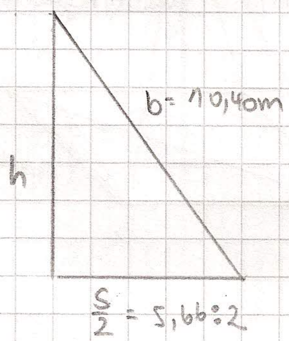
Die Schüler bekommen nun ein Arbeitsblatt ausgeteilt auf dem die Grundfläche der Pyramide nochmals abgebildet ist.



Sie sollen die Skizze beschriften und die Länge S ausrechnen.

S = 5,66

Im Unterrichtsgespräch wird erarbeitet, dass nur die Hälfte der Strecke S benötigt wird, wenn man die Höhe h berechnen möchte.
Anhand einer Schablone (die der Lehrer vor der Stunde entworfen hat) soll den Schülern das Dreieck AST noch einmal aufgezeigt werden. Dies ermöglicht, ~~dass~~ den Schülern, deren räumliches Vorstellungsvermögen noch nicht soweit entwickelt ist, eine konkrete Veranschaulichung.
Gemeinsam wird erarbeitet dass die Höhe ~~H~~ wie folgt zu berechnen ist.
Der Lehrer rechnet an der Tafel:



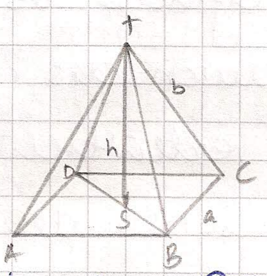
$$b^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$
$$10{,}40\,m^2 = h^2 + (2{,}83\,m)^2$$
$$h^2 = 10{,}40\,m^2 - 2{,}83\,m^2$$
$$h = 10\,m$$

Antwort: Die Efeupflanze muss 10m hoch wachsen, bis sie die Decke des neuen Gewächshauses erreicht.

Vertiefung

Zur Vertiefung der durchaus komplexen Aufgabe bekommen die Schüler ein Arbeitsblatt mit verschieden ~~Aufgaben~~ Abbildungen, die die ~~das~~ eben aufgezeigten Gesetzmäßigkeiten nochmals vertiefen soll. Schrittweise sollen die Schüler die vollzogenen Handlungen nochmals vertiefen.

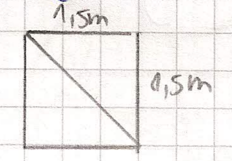
Arbeitsblatt



Male die entsprechenden Sätze in der Pyramide farbig an.

(A) Eine quadratische Grundfläche lässt sich in zwei rechtwinklige Dreiecke teilen (einzeichnen)

(B) Die Diagonale lässt sich über den Satz des Pythagoras berechnen:



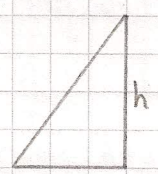
Rechne: ____________________

____

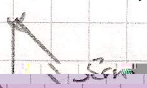
____

(C) Die Höhe in einer Pyramide ist senkrecht zur Grundfläche (einzeichnen)

Beschrifte das Dreieck (es gibt mehrere Lösungen)



(D) Berechne folgende Höhe h



Schluss

Zum Ende der Stunde bekommen die Schüler noch eine Hausaufgabe, die ähnliche Aufgaben wie das Arbeitsblatt (zur Vertiefung) beinhaltet.

Schwierigkeiten

Die Schüler dürften eventuell Probleme dabei haben die quadratische Grundfläche als solche zu erkennen. Dies soll durch das Pyramidenmodell und das Arbeitsblatt verdeutlicht werden. Ebenfalls kann das Erkennen des ΔAST als rechtwinkliges schwierig sein. Auch hier wird mit dem Modell versucht die räumliche Vorstellung zu unterstützen.