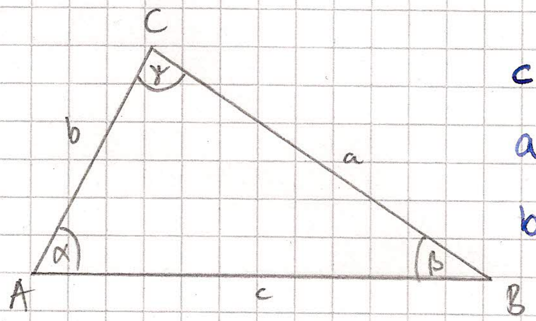
1. Bevor man mit der allgemeinen Erläuterung der Sätze gruppe des Pythagoras anfangen kann, muss man ein allgemeines Dreieck anschauen und dem allgemeinen Aufbau eines Dreiecks betrachten.

Dazu eine Veranschaulichung:



c = Hypothenuse

a = Kathete

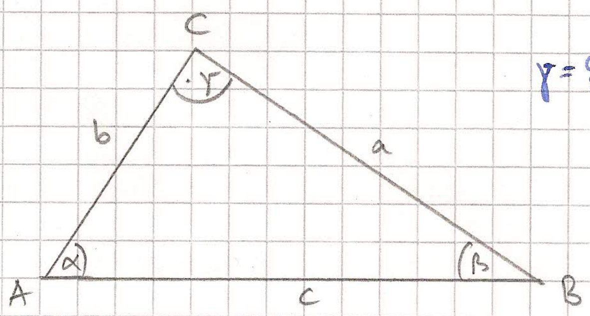
b = Kathete

Die Grundseite des Dreiecks „c" nennt man Hypothenuse, die zwei anliegenden Schenkel werden als Katheten bezeichnet. Diese unterschiedlichen Bezeichnungen sind wichtig zum Verständnis der Satzgruppe des Pythagoras.

Voraussetzung für den Satz des Pythagoras ist die rechtwinklige Struktur des Dreiecks.

Daraus folgt:

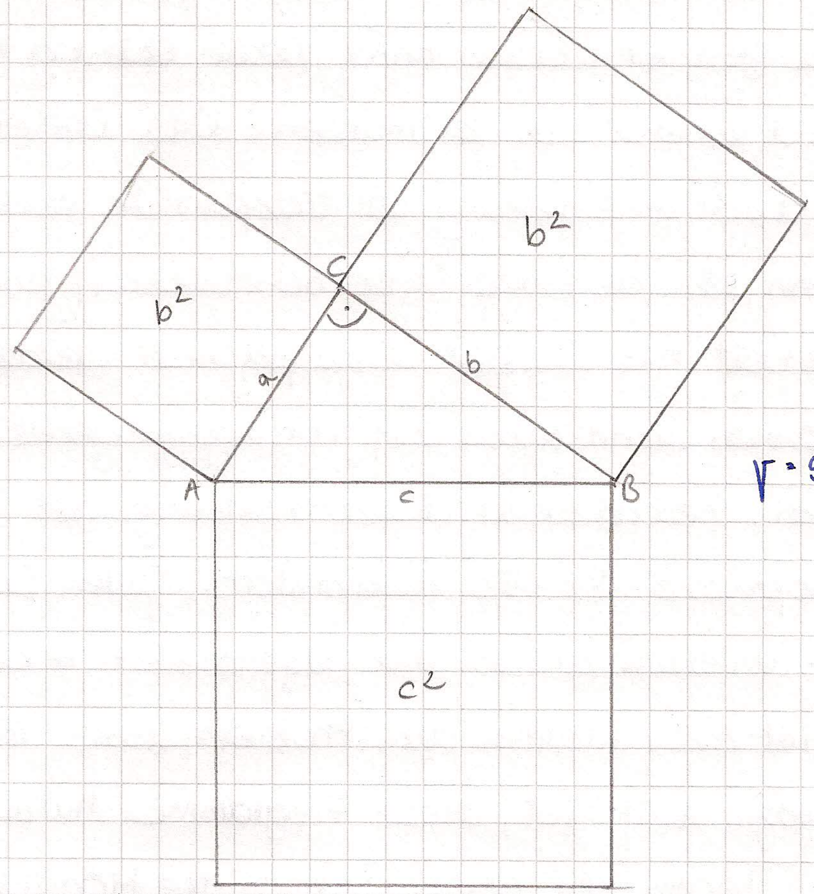
In einem echtwinkligen Dreieck mit dem Winkel $\gamma = 90°$, den Katheten a und b und der Hypothenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$



$\gamma = 90°$

Desweiteren kann gesagt werden, dass die Quadrate über den Katheten $a+b$ den selben Flächeninhalt haben wie das Quadrat über der Hypothenuse c.

Veranschaulicht sieht das im Folgenden so aus:



$\gamma = 90°$

Konstruiert man über den Seiten a, b, c eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren mit den Flächeninhalten $F(a)$, $F(b)$ und $F(c)$, so gilt:

$$\underline{F(a) + F(b) = F(c)}$$

Die Umkehrung hierfür würde lauten:

Wenn der Flächeninhalt ~~über~~ des ~~Hypo~~ Quadrats über der Hypothenuse so groß ist wie der Flächeninhalt der Quadrate über den Katheten, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Aus dem Satz des Pythagoras folgen zwei weitere Sätze, der Kathetensatz und der Hypothenusensatz.

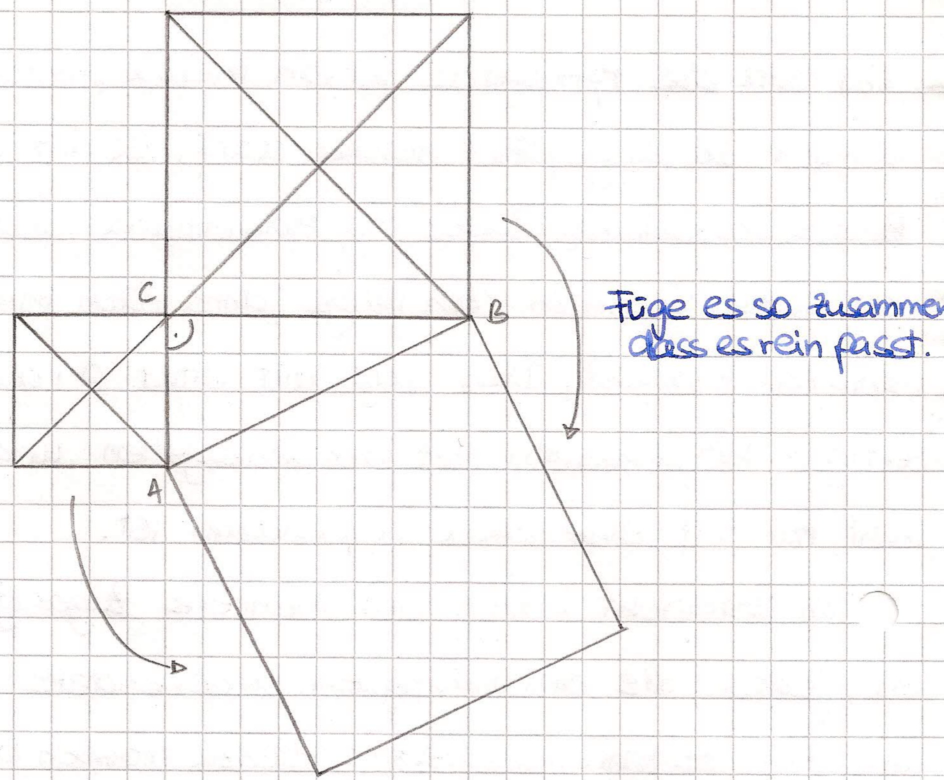
2. Der Satz des Pythagoras ist ein Thema, welches nicht einfach so eingeführt werden darf. Es ist einer der Bedeutungsvollsten Sätze der Mathematik und auch von vielen Schülern noch lange Jahre nach ihrer Schulzeit bewusst. Dies liegt mit unter an den vielseitigen Möglichkeiten mit ihm umzugehen und dass er nicht nur auf eine Sache anwendbar ist.

Im Unterricht bieten sich mehrere Zugangsweisen an, jedoch die am häufigsten angewendete ist eine Art Zerlegungsbeweis: Hierzu müssen die Schüler die zwei Quadrate über den Katheten so zerlegen, dass die Zerlegungsstücke in das Quadrat über der Hypothenuse passten. Dies erfolgt auf einer operativen Basis. Bestmöglich bekommen die Schüler eine Art Plan. Die Aufgabenstellung könnte lauten:

1. Zerlege die zwei Quadrate über den Katheten in vier gleichgroße Dreiecke.
2. Schaue ob du die so entstandenen Dreiecke in das Quadrat über der Hypothenuse bringst.

~~Dies könnte man wie folgt aussehen~~. Zur Veranschaulichung werde ich das auf der nächsten Seite graphisch darstellen.

Veranschaulichung: (leider ohne Farbe)



Dadurch wird den Schülern bewusst gemacht, dass die Formel $F(a) + F(b) = F(c)$ ist. Sie haben es selbst ausprobieren können. Zudem haben sie erste Schritte zum Beweisen erlangt. Das Belegen mit Hilfe von Zerlegungen kann man allgemein als Vorstufe zu rein mathematischen Beweisen sehen. Sie werden an das Problemlösen herangeführt und sie lernen mit Kopf, Herz und Hand. Wichtig wäre dabei noch, dass sie die Zerlegungen des Kathetenquadrate frei bewegen können. Dann haben die Schüler freie Hand zum Ausprobieren und erkunden. Erst wenn die Schüler mit allen Sinnen gearbeitet haben ist ein kumultatives Lernen möglich. Vorallem haptisch muss im Mathematikunterricht einiges verlaufen.

Des Weiteren bietet sich beim Satz des Pythagoras auch die Dynamische Geometrie Software, kurz DGS an. Das grundsätzliche Herangehen an den Satz verläuft gleich, bis ähnlich. Durch die Software können die Schüler nochmals eigenständig konstruieren üben. Dies dient zudem der Wiederholung. Außerdem kann hierbei getestet werden ohne dabei ständig neu zeichnen und konstruieren zu müssen. Das Dreieck lässt sich durch Verschiebung der Eckpunkte verändern. Zudem kann der bisherige Unterrichtsverlauf und die Arbeit mit der DGS abgespeichert werden. Schüler können somit auch auf vorangegangenes zurückgreifen. Besonderheit dieser Nutzung der Geometriesoftware ist die Flexibilität. Jeder Schüler kann ganz unterschiedlich und differenziert arbeiten. Allerdings ist auch hierbei das Problem, dass es auch die Möglichkeit gibt, diese Programme nutzen zu können. Wenn die Schule jedoch die Möglichkeit bietet, ist es auch für die Schüler eine gelungene Abwechslung, die viele Möglichkeiten ~~bietet~~ bereit hält. Dies ebenfalls auf anderen Gebieten der Geometrie.

Um jedoch den Satz des Pythagoras einzuführen und zu erläutern, brauchen die Schüler eine gewisse Basis, ein gewisses Grundwissen der Geometrie. Sie kommen mit einer ganz großen Vorstellung über die verschiedenen Figuren Rechteck, Parallelogramm, Dreieck, usw. aus der Grundschule. Die Figuren der Ebene haben für sie

noch keine Eigenschaften, tatsächlich definiert wurden sie somit auch noch nicht. Es gilt nun also zu Beginn der Sekundarstufe den Schülern den innermathematischen Gesichtspunkt näher zu bringen.
Haben sich die Schüler im Laufe der ersten Schuljahre der Sekundarstufe mit den Eigenschaften, Definitionen und Sätzen auseinander gesetzt kann man als Lehrkraft die nötige Vorbildung voraussetzen und den Satz des Pythagoras einführen. Jedoch benötigen die Schüler eine gewisse Vorbildung, welche auch als roter Faden im Lehrplan der Hauptschule Bayern zu verzeichnen ist.
Ebenso wichtig ist es den Schülern bei der Untersuchung der Satzgruppe des Pythagoras, oder ~~das Satz~~ dem Satz des Pythagoras allein, dass die Schüler sich das Thema operativ erschließen und dabei häufig ihre Erfahrungen und Erkenntnisse verbalisieren.
Eine anfängliche Alltagssprache bei der Formulierung z.B. von Definitionen und Eigenschaften ist normal, da die Schüler an ihre Lebenswelt anknüpfen.
Dabei sind wir an einem weiteren wichtigen Punkt unterrichtlichen Zugangsweise angelangt. Der Unterricht sollte wenn möglich das sogenannte EIS-Prinzip verfolgen. Das „E" steht für enaktiv, das „I" für ikonisch und zu letzt das „S" für symbolisch. Damit sind Erschließungsprinzipien gemeint, welche ganz unterschiedlicher Natur sein können.

Der Zerlegungsbeweis des Satzes wäre eine ikonische Herangehensweise an den Satz. Die Erschließung verläuft über ein Bild oder Legepuzzle.
Das anschließende Zusammentragen an der Tafel und die Erarbeitung der Formel $a^2+b^2=c^2$, deren Heftaufschrieb wären innerhalb des EIS-Prinzips die symbolischen Herangehensweisen, dabei geht es um das Festhalten von Formeln, das Erstellen von Tabellen, usw.. Zu letzt fehlt uns noch die enaktive Form, dabei versucht man mathematische Formeln und Tatsachen in der Umwelt zu entdecken und zu erschließen. Gerade bei den Figuren der Ebene in der Geometrie und den Körpern im Raum hat der ~~[illegible]~~ Lehrer viele Möglichkeiten, einen lebensweltlichen Bezug dazu herzustellen. Je enger die Verknüpfung ist, desto mehr können Schüler mit Mathematik anfangen. Über den Satz des Pythagoras kann man das Geflecht der Satzgruppe weiter erschließen, dies wird jedoch in der Hauptschule nur in den ~~Regelklassen~~ M-Klassen weitergesponnen. Für die Regelklassen steht im Lehrplan nur der Satz des Pythagoras, als Thema.

Auf der nächsten Seite geht es weiter.

3. Unterrichtseinheit Satz des Pythagoras:

Im Vorfeld jeder Unterrichtsstunde steht die Unterrichtsvorbereitung:
Welche Voraussetzungen haben die Schüler?
Welche Möglichkeiten habe ich für die Umsetzung?
Erstellen einer Sachanalyse des Themas?!
Eruieren mathematische Neuheiten!
Welche Dinge müssen wiederholt werden.
Lehrplanbezug herstellen.

Für die Voraussetzung der Schüler kann ich jetzt leider nicht wirklich etwas sagen, da es sich um eine fiktive Unterrichtseinheit handelt. Nehmen wir jedoch den Lehrplan als Maßstab, dann befinden sich die Schüler momentan in der achten Klasse und haben im Vorfeld schon bestimmte mathematische Fähigkeiten, Kompetenzen erwerben können. Sie sollten vertraut sein mit der Figur des Dreiecks, die Eigenschaften und Definitionen kennen sie schon und zu dem können sie Dreiecke konstruieren, ihnen ist das Grundwerkzeug im Idealfall ausreichend bekannt. Bei den Möglichkeiten der konkreten Umsetzung haben wir im Vorfeld der Arbeit schon welche kennen gelernt, erinnern sie sich an das EIS-Prinzip. Verankert ist das Thema im Lehrplan der Klasse und wird in der M-Klasse erweitert durch die Satzgruppe des Pythagoras. In der Regelklasse spielt dies keine weitere Rolle mehr. Die Wiederholung des vorangegangenen Stoffes darf jedoch nicht fehlen, da Wissenslücken und die fehlende Verknüpfung nicht zu einem ganzheitlichen mathematischen Wissen führt. Es ist also zunehmend wichtiger den Schülern einer Verknüpfung ihres Begriffsnetzes während der Unterrichtseinheit zu ermöglichen, das heißt die Schüler müssen ihr sogenanntes altes Wissen möglichst gut mit dem neuen Wissen verbinden können. Als Idealfall gilt, dass sie so flexibel werden in ihrer gedanklichen Struktur und sie sich innerhalb dieses Netzes frei bewegen können.

Als übergeordnetes Grobziel dieser Einheit sollte gelten: Die Schülerinnen und Schüler kennen den Satz des Pythagoras.

Die dazu gehörigen Feinziele:

1. Die Schülerinnen und Schüler können den Satz des Pythagoras anwenden.
2. Die Schülerinnen und Schüler kennen die dazugehörige Formel $a^2+b^2=c^2$
3. Die Schülerinnen und Schüler können den Satz des Pythagoras auf andere Anwendungen übertragen.
4. Die Schülerinnen und Schüler kennen den Zerlegungsbeweis nachmachen und beschreiben.

Einstieg: Als Einstieg würde ich zur kleinen Aufwärmung und Auflockerung jeweils 5 Minuten Kopfgeometrie mit den Schülern machen. Kopfgeometrie macht gedanklich beweglich und schult die Kompetenz der räumlichen Vorstellung. Für viele Schüler ist die bloße gedankliche Bearbeitung eines Problems unheimlich schwer, da ihre räumliche Vorstellung nicht ausgebildet ist. Gerade deswegen sollte man dies während der Bearbeitung geometrischer Probleme und Thema immer wieder machen. Es gibt eine Vielzahl an verschiedenen Kopfgeometrieaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsstufen.

Es ist ebenfalls egal, ob die Schüler erst in der 5. Klasse sind oder schon große Schüler der 8., 9. oder 10. Klasse. Meiner Meinung nach ist das flexible Hirntraining, welches zu jeder Zeit angebracht ist.

Des Weiteren kann es in höheren Klassenstufen auch wiederholende Funktionen erfüllen und außerdem haben alle drei Phasen der Kopfgeometrie Variationsmöglichkeiten.

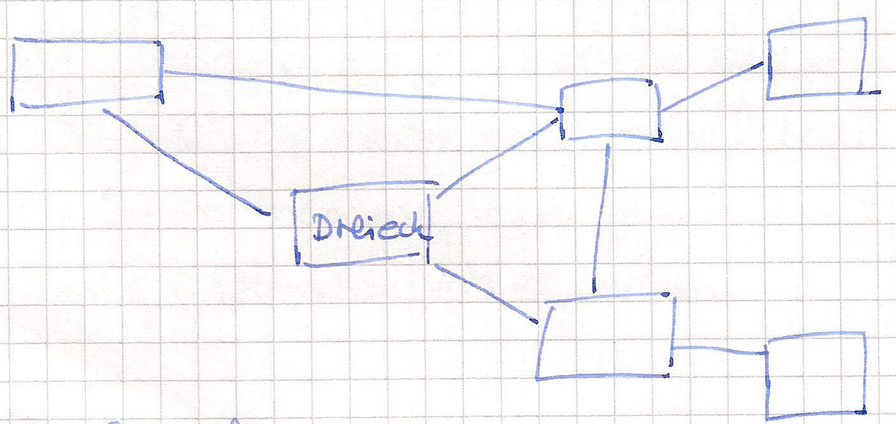
Zudem erfüllt die dritte Phase der Ergebnispräsentation nach dem Charakter der Schulung der mathematischen Ausdrucksweise.

Zusammengefasst ist es eine durchaus produktive Form der Anwendung von geometrischen Feldern.

Zu Beginn der Unterrichtseinheit würde ich mit den Schülern erst einmal eine Wiederholungsstunde zum allgemeinen Dreieck anstellen, da die Schüler offen sein müssen für die Erweiterung ihrer gedanklichen Netze, das Begriffsnetz sollte ja möglichst erweitert werden. Daraus folgt also:

LE 1 : Einstieg : Kopfgeometrie

Weiterer Verlauf der Stunde stellt die Wiederholung dar des Dreiecks.
Hierfür würde ich den Schülern eine Stationenarbeit anbieten. Jede Station wiederholt ein großes Lehrplan-Thema, sie können dabei an einer Station mit DGS arbeiten, an einer anderen mit dem Geobrett, Zirkel und Linealkonstruktionen und die Auffrischung der Dreieckseigenschaften dürfen natürlich nicht fehlen.
Als Abschluss bekommen die Schüler eine Hausaufgabe ausgeteilt in der sie nochmal wiederholen und versuchen die Begrifflichkeiten zu ordnen.
Was gehört bisher wie zusammen:



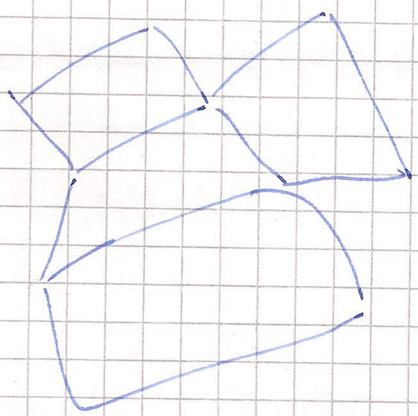
als Beispiel:

Ist dies geschehen kann man zur eigentlichen Stunde für den Satz des Pythagoras kommen.

Der Einstieg verläuft wieder über die Kopfgeometrie.
Im Anschluss daran wiederholt man gemeinsam an einem rechtwinkligen Dreieck, die Begrifflichkeiten Kathete und Hypothenuse. Die Beschriftung mit A,B,C und a,b,c ist Voraussetzung.
Ist dies geklärt werden den Schülern die Arbeitsblätter mit dem Zerlegungsbeweis ausgeteilt und sie dürfen immer in Partnerarbeit gemeinsam das Arbeitsblatt bearbeiten.
Das Arbeitsblatt sieht wie folgt aus:

Satz: Wenn . . . .
da . . .

Konstruktion



Die Schüler erhalten den Satz als Aussage, welche unkomentiert bleibt.

Nach der Bearbeitung wird im Plenum über die gewonnen Erkenntnisse berichtet und zusammengetragen.
Als Hausaufgabe sollen sie versuchen, ob es auch mit konstruierten Dreiecken über den Seiten funktioniert.

In der darauf folgenden Stunde kommt man gemeinsam mit der Lehrkraft auf die allgemeine Formel

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$F(a) + F(b) = F(c)$$

4. Beweis: $a^2 + b^2 = c^2$

Voraussetzung: $\gamma = 90°$

Behauptung: $a^2 + b^2 = c^2$