

GLIEDERUNG NR 3:

1

1. Satzgruppe des Pythagoras

1.1. Satz & Umkehrsatz des Pythagoras

1.2. Höhensatz & Höhenumkehrsatz

1.3. Kathetensatz & Kathetenumkehrsatz

2. Unterschiedliche Zugangsweisen zum Satz des Pythagoras

3. Unterrichtseinheit zur Anwendung des Satzes des Pythagoras im Raum

4.1 Beweis vom Satz des Pythagoras

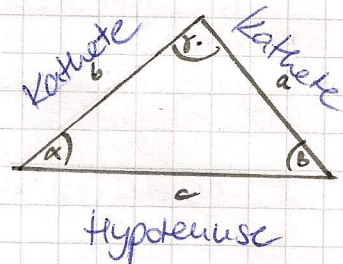
4.2 Beweis vom Umkehrsatz des Pythagoras

1. Satzgruppe des Pythagoras

1.1 Satz des Pythagoras:

Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist ($\gamma = 90^\circ$), dann ergibt die Summe der Quadrate der beiden Katheten ($a^2 + b^2$) das Quadrat der Hypotenuse (c^2).

$$\gamma = 90^\circ \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$



Auch die Umkehrung dieses Satzes gilt:

Ergibt die Summe der Quadrate über ² Schenkeln eines ~~rechtwinkligen~~ Dreiecks das Quadrat ^{des 3. Schenkels} ~~der Hypotenuse~~, so ist das Dreieck rechtwinklig.

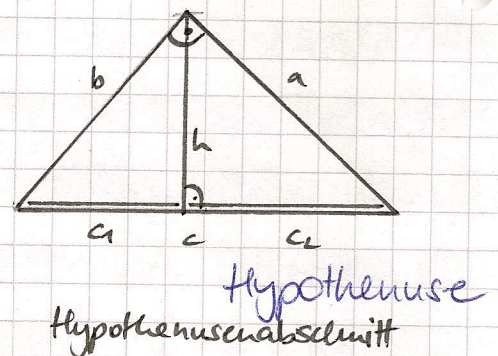
1.2 Höhensatz

Ist ein Dreieck rechtwinklig, so ist das Quadrat der Höhe dem Produkt der, durch die Höhe entstehenden Hypotenusenabschnitte gleich.

$$\gamma = 90^\circ \rightarrow h^2 = c_1 \cdot c_2$$

Umgekehrt gilt auch:

Ist das Quadrat der Höhe eines Dreiecks gleich dem Produkt der, durch die



höhe entstandenen Hypotenusenabschnitt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

1.3 Kathetensatz

3

Ist ein Dreieck rechtwinklig, dann entspricht dem Quadrat einer Kathete das Produkt aus der Hypothenuse und dem, an der Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt.

$$\gamma = 90^\circ \rightarrow c^2 = c \cdot c_2 \quad (\rightarrow \text{Zeichnung unten links})$$

Die Umkehrung des Satzes lautet:

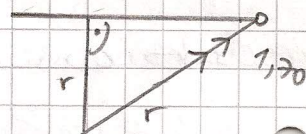
Entspricht das Quadrat eines Schenkels $\overset{a}{V}$ dem Produkt aus einem anliegenden Schenkel $\overset{c}{V}$ und dem Teilabschnitt dieses Schenkels der durch die Teilung ~~des Schenkels~~ durch die Höhe entsteht und an ersterem Schenkel $\overset{a}{V}$ anliegt, so ist der Winkel gegenüber von c 90° .

Auch dieser Satz ist richtig, aber sehr kompliziert zu verstehen & somit auch anzuwenden.

2. Unterrichtliche Zugangsweisen zum Satz des Pythagoras.
Um die Notwendigkeit des Satzes herzustellen, benötigt man ein Einstiegsproblem, das ohne ihn nicht zu lösen ist.

Beispielsweise die Aufgabe, ^{bis zu welcher Entfernung} ~~wie weit~~ kann ein Mensch mit Körpergröße 1,70m bei optimalen Bedingungen (keine Unebenheiten, gute Sichtverhältnisse) mit einem Fernglas eine Straße sehen.

Gegeben sind also 2 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, die dritte Seite ist gesucht.



Nach dieser Problemstellung muss der Satz des Pythagoras eingeführt werden.

Eine andere Möglichkeit den Satz des Pythagoras einzuführen, ist die Problemstellung, die Schüler sollen aus 2 Quadraten, ein großes Quadrat legen // sie sollen 2 kleine Quadrate so zerteilen, dass sie in ein drittes Quadrat passen.

Auf diese Weise finden die Schüler selbständig, evakiv den Beweis für den Satz des Pythagoras, ohne sich dessen bewusst zu ^{sein} werden. Dieses Bewusstsein muss ausschließlich im Kollektiv unbedingt geschaffen werden, ~~abam~~ besten durch ikonisch, bildliche Veranschaulichungen und letztendlich muss die Formel hergeleitet werden, dies wäre die Abstraktion.

Eine weitere Möglichkeit ist, verschiedene Dreiecke ausmessen zu lassen, sie nach Eigenschaften sortieren zu lassen und die Ergebnisse dann in eine

Tabelle eintragen zu lassen. Fügt man hier
nun ~~ein~~ weitere Spalten ein, in welchen die
Schüler a^2+b^2 und c^2 ausrechnen sollen, werden
sie feststellen, dass bei rechtwinkligen Dreiecken
die Ergebnisse der Spalte a^2+b^2 und c^2 gleiche
sind. Daher kann man nun folgern, dass das
immer so sein könnte, es beweisen und als
feste Formel $a^2+b^2=c^2$, wenn $\gamma = 90^\circ$ aufstellen.

3. Unterrichtseinheit zur Anwendung des Satzes des Pythagoras im Raum

SACHANALYSE & DIDAKTISCHE REDUKTION

Der Satz des Pythagoras wurde bereits in Aufgabe beschrieben. Im Raum benötigt man den Satz des Pythagoras dazu Raumdiagonalen ~~nicht~~ ~~vorzustellen~~ und Diagonalen einzelner Flächen des Raumes zu errechnen.

Da es sehr schwer für Schüler ist, sich Raumdiagonalen richtig vorzustellen, richtig einzuzichnen und letztendlich zu berechnen, werde ich mich in dieser Unterrichtseinheit darauf beschränken die Diagonalen ^{einzelner} von ^{von Körpern} Flächen ^{zu} errechnen zu lassen.

UNTERRICHTSVORAUSSETZUNGEN

Da man für diese Aufgaben sowohl Wissen über Körper, als auch die Kenntnis des Satzes des Pythagoras ^{& Wurzelrechnen} benötigt, würde ich diese Unterrichtseinheit in der 8. Klasse anordnen.

Im vorherigen Verlauf der Unterrichtssequenz müssen Wurzeln wiederholt, der Satz des Pythagoras eingeführt & geübt werden. Für diese Unterrichtseinheit ~~ist ein~~ wird ein Umgang mit dem Satz des Pythagoras ~~weiter~~ vorausgesetzt.

LERNVORAUSSETZUNGEN:

7

Schüler müssen bereits die Quadrat- & Wurzelrechnung beherrschen, sie brauchen räumlichen Vorstellungskraft, logisches Denken, und sie müssen den Satz des Pythagoras & seine Anwendung kennen & beherrschen.

ZIELE:

Das Grobziel dieser Unterrichtsstunde soll sein, dass sie lernen, den Satz des Pythagoras auf Alltagsprobleme zu übertragen.

Folgende ~~Feinziele~~ mathematische Feinziele werden zudem verfolgt:

- Verbesserung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Verbesserung des logischen Denkens
- Alltagsbezug der Mathematik aufzeigen
- Umgang mit Längemaßen + Umrechnung

UNTERRICHTSEINHEIT

Artikulation

Methodik

Kopfrechenphase

"Rechenkönig" mit Wurzelzahlen
Aufteilung in Ecken, bei richtiges Antwort,
im Wurzelzigersinn 1 Ecke weiter, wer als
erster sein "Anfangsack" erreicht hat,
hat gewonnen.

Einstieg

Erzählung über Jungen, der nach seinem
Schulabschluss eine Lave in München macht.
Dafür muss er umziehen. Er hat bereits
eine WG gefunden, in die er einziehen
dort, aber er braucht noch eine Einrichtung.
Zuerst durchforstet er dafür den Keller
seiner Eltern, aber was passt in sei

Problemstellung

Was passt in sein WG-Zimmer & muss
er alles zerlegen, oder kann er manche
Möbelstücke ganz mitnehmen?

Schülervermut-
ungen

Er muss ausmessen, ob es klappt
Er muss rechnen, ob er Stühle
aufstellen kann
Er muss schauen, was durch die Tür
passt & wie viel er mitnehmen kann.

Erarbeitung

Aussteilen der Arbeitsblätter, jeder
muss sich ⁱⁿ Gruppe mit gleichen
Arbeitsblättern zusammenfinden
→ Differenzierung durch z.B. Ein-
zeichnen d. benötigten Diagonale
→ keine Hilfestellungen → Hilfe-
stellung an manche

Sicherung

Vortragen & Vergleichen der
Ergebnisse durch die Schüler

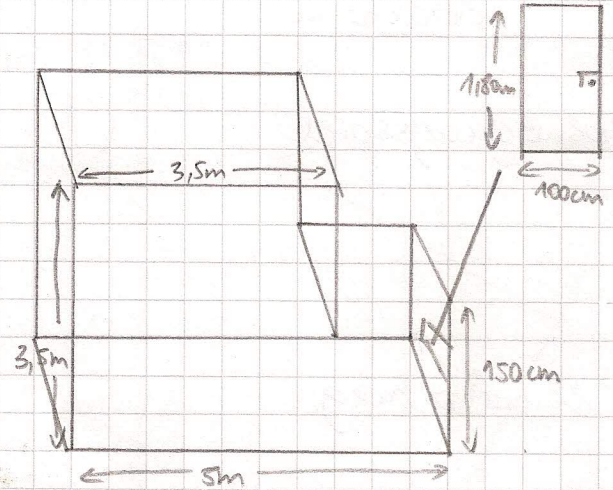
Abstraktion

Fazit in Kasten auf AB erst
verbale Vorschläge, dann
tragen es alle ein.

Sozialform	Medien
Bewegungsspiel	
Lehrervortrag	
Lehrervortrag	Folie; Overhead- projektor
Lehrer - Schüler - Gespräch	
Gruppenarbeit	ABs / differenziert
Schülergespräch	Folie, Overhead- projektor
Lehrer - Schüler - Gespräch	" "

ARBEITSBLATT

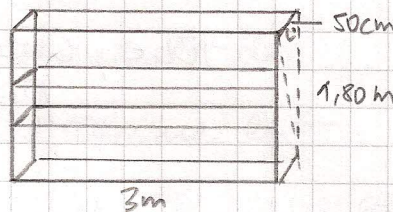
Grundriss der Wohnung:



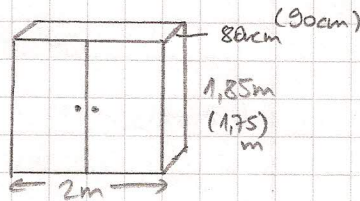
Möbelstück:

aufstellbar? (Rechnung)

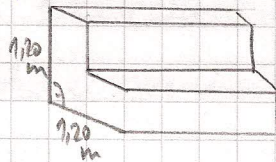
Regal



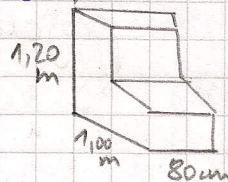
Schrank



Sofa



Sessel



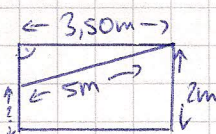
Fließaufgabe: Unse Azubie möchte einen Magnetscheiter an die 3,50m lange Wand hängen. Auf
beginnen, wenn das Band in eines o

MERKE:

Der Satz des Pythagoras ist zur
Längen, besonders von Diagonalen

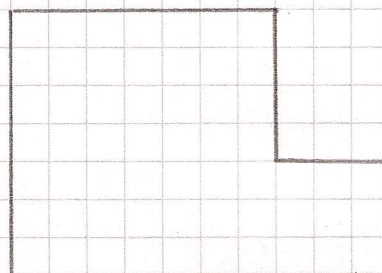
passt durch die Tür? wird es mitgenommen?

der Länge sin diagonal
welcher Höhe muss es
oben Ecke landen soll?



Errechnung von
wirklich.

Wenn du noch Zeit
hast, kannst du hier
das timmer einzeichnen



4.1 Beweis vom Satz des Pythagoras

Sicherungsbeweis: Vor: $\gamma = 90^\circ$ (1) ~~Subtrahieren~~ die Quadrate a^2 & b^2 zu Parallelo-grammen auf h

(Beweisidee 1)

(2) Flächeninhalt der
Parallelogramme ent-
spricht dem der vorherigen
Quadrate

(Affinität)

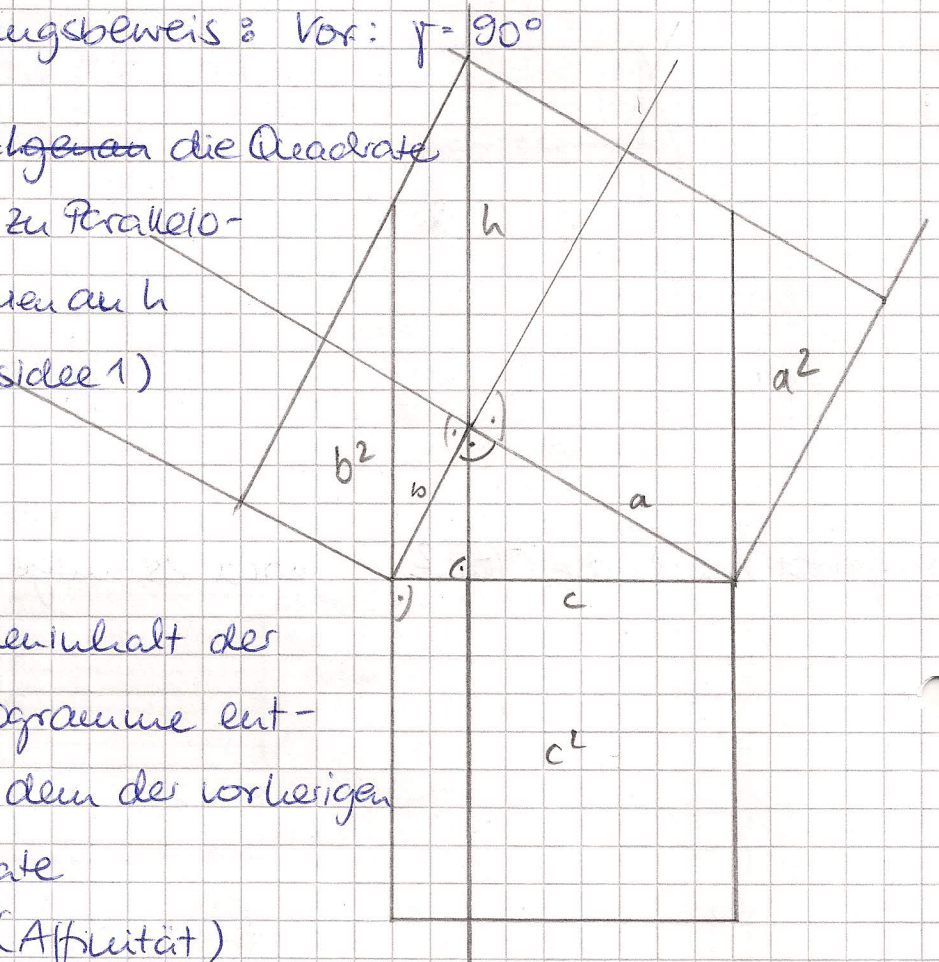
(3) Setzt man nun die entstandenen Parallelogramme
zu Rechtecken auf c , erhält man wieder
Flächengleiche Figuren (2)

(4) Vergleicht man nun da aus ~~a^2 & b^2~~ den
beiden neuen Rechtecken entstandene Quadrat
mit c^2 , stellt man fest, dass die beiden
Quadrate kongruent sind

$$\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

(WSW~~ig~~)

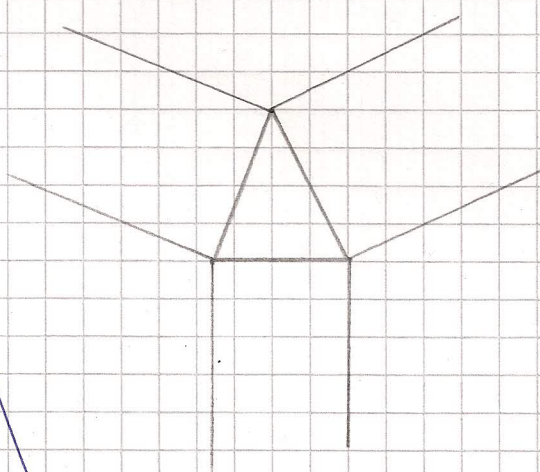
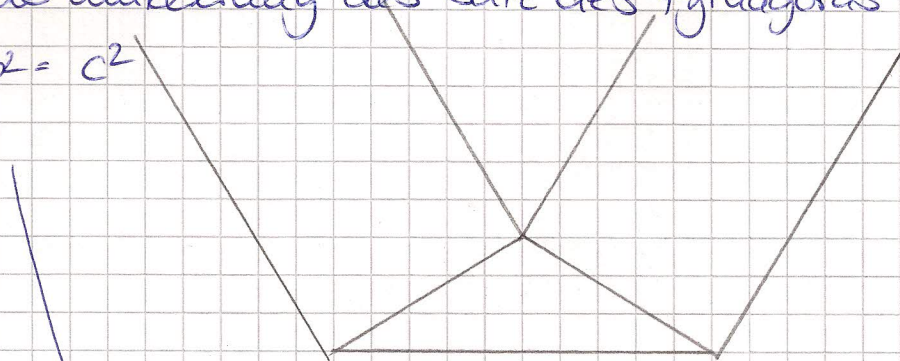
(Behauptung)



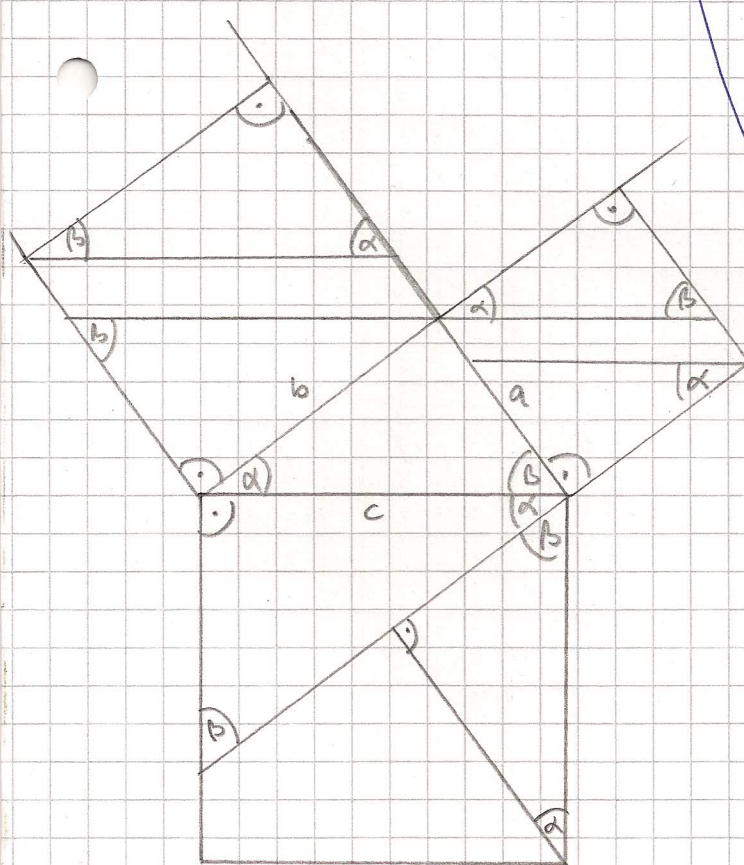
4.2 Beweis der Umkehrung des Satz des Pythagoras

13

Vor: $a^2 + b^2 = c^2$



$\frac{1}{2} a \cdot b = A$



- 1) $a^2 + b^2 = c^2 \quad | : a \quad (\text{Vor})$
- 2) $a + \frac{b^2}{a} = c^2 \quad | \cdot b \quad (1)$
- 3) $a \cdot b + \frac{b^3}{a} = c^2 \cdot \frac{b}{a} \quad (2)$
- 4) $a \cdot b = c^2 \cdot \frac{b}{a} - \frac{b^3}{a} \quad (3)$
- 5) $a \cdot b = \frac{b}{a} (c^2 - b^2)$
- 6) $a \cdot b = \frac{b}{a} \cdot a^2 \quad (\text{Vor})$

7) $a \cdot b = b \cdot a \rightarrow \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} b \cdot a$
 $= A \text{ bei rechth. Dreieck!}$